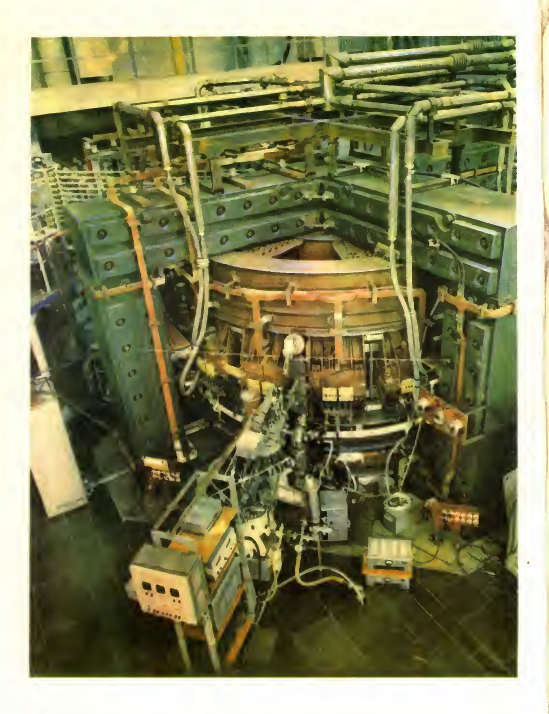
Квант

11
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Советские физики лидируют в области исследований проблемы управляемых термоядерных реакций и возможности использования термоядерной энергии в мирных целях. Особенно важные результаты получены на экспериментальных термоядерных установках «ТОКАМАК», созданных в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова.

На помещенной здесь фотографии изображена самая мощная установка этого типа — «ТОКАМАК-10». Полученная в ней водородная плазма имеет рекордные характеристики. На этой установке мы уже имеем развитую термоядерную реакцию в лабораторных условиях.

По образу и подобию советских токамаков созданы термоядерные установки во многих странах мира. «ТОКАМАК-10» послужит прообразом будущих термоядерных электростанций.



Основан в 1970 году



Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Издательство „Наука" Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ

Статья 25. В СССР существует и совершенствуется единая система народного образования, которая обеспечивает общеобразовательную и профессиональную подготовку граждан, служит коммунистическому воспитанию, духовному и физическому развитию молодежи, готовит ее к труду и общественной деятельности.

Статья 26. В соответствии с потребностями общества государство обеспечивает планомерное развитие науки и подготовку научных кадров, организует внедрение результатов научных исследований в народное хозяйство и другие сферы жизни.

Конституция СССР

Наука общества, строящего коммунизм

60 лет отделяют нас от того знаменательного дня, когда рабочие и крестьяне России взяли власть в свои руки, создав первое в мире пролетарское государство. Великая Октябрьская социалистическая революция открыла человечеству путь к социализму. С тех пор на этот путь сознательно вступили десятки государств. Социализм с каждым годом становится все более могучей политической, экономической и социальной системой современного мира.

Год от года крепнет и развивается могущество Советского Союза. Наша страна — страна развитого социализма — приступила к созданию коммунистического общества. Выдающиеся достижения советского народа отражены в новой Конституции СССР, принятой недавно Верховным Советом СССР после поистине всенародного обсуждения. И каждая победа, каждый успех на пути к социализму и коммунизму неразрывно связаны с нашей наукой и школой.

Октябрьская революция коренным образом изменила роль и место науки в государстве. Еще Карл Маркс, разрабатывая идеи научного социализма, пришел к выводу, что социализм будет по-научному относиться к процессу своего развития и совершенствования. В. И. Ленин глубоко и всесторонне разработал вопрос о роли науки в строительстве социализма и коммунизма. В своей знаменитой речи на III Всероссийском съезде комсомола, произнесенной в 1920 году, он говорил: «Мы знаем, что коммунистическое общество нельзя построить, если не возродить промышленности и земледелия, причем надо возродить их не по-старому. Надо возродить их на современной, по последнему слову науки построенной, основе».

Несмотря на чрезвычайно неблагоприятные условия — гражданскую войну, разруху, чудовищную отсталость и нищету,— Ленин уделял огромное внимание развитию молодой советской науки. Она и сейчас опирается на принципы, завещанные Ильичом. Впервые в мировой истории организация и планирование науки стали осуществляться как одна из важнейших государственных задач. При этом большое внимание уделялось развитию физико-математических наук, которые всегда были основой техники и производства.

До революции в России существовал только один физический институт (в Москве), да и тот был построен без какой-либо поддержки со стороны царского правительства. Он возник по инициативе выдающегося русского физика П. Н. Лебедева на частные пожертвования. Но уже в 1918 году по указанию В. И. Ленина в Петрограде были созданы Физико-технический и Оптический институты, в Нижнем Новгороде (Горьком) — специальная радиолаборатория. Вскоре к ним присоединились Физико-математический институт Академии наук и Радиевый институт в Петрограде, Центральный аэрогидродинамический институт в Москве. Теперь в стране работают сотни научно-исследовательских институтов, специализирующихся в области физико-математических наук. Многие из них, такие, как Физико-технический институт АН СССР имени А. Ф. Иоффе, Физический институт АН СССР имени П. Н. Лебедева, Институт физических проблем АН СССР имени С. И. Вавилова, Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова, Математический институт АН СССР имени В. А. Стеклова, стали крупнейшими центрами мировой науки. Научно-исследовательские физико-математические институты имеются во всех республиках нашей страны. Успешно развивают советскую науку институты, принадлежащие к другим академиям, в том числе Академии педагогических наук СССР, а также высшие учебные заведения.

В 1910 году Министерство народного просвещения царской России отклонило просьбу Академии наук выделить ей 800 рублей для организации экспедиции по исследованию месторождений радиоактивных минералов. В наши дни государство ежегодно выделяет на развитие науки десятки миллиардов рублей.

Наши ученые внесли огромный вклад в создание тяжелой индустрии, в победу над гитлеровскими полчищами, в строительство развитого социалистического общества. В невиданно короткие сроки они ликвидировали монополию США на атомное оружие. Советская наука открыла человечеству путь к мирному использованию атомной энергии, проложила дорогу в Космос, первой осуществила управляемые термоядерные реакции в лабораторных условиях — предвестник энергетики будущего, заложила основы математической экономики, топологии и ряда других разделов современной математики.

Достижения советских ученых навсегда вошли в сокровищницу мировой науки. Эффекты Иоффе, Черенкова, Капицы, Кикоина, Келдыша—Франца, Шпольского, Серпуховской эффект, диамагнетизм Ландау, метод Хартри—Фока, теория Гинзбурга—Ландау—Абрикосова—Горькова, критерий Крускала—Шафранова — эти термины можно прочитать теперь в статьях и книгах на всех языках. Высшие международные научные награды — Нобелевские премии — присуждены советским ученым академикам Н. Н. Семенову, И. Е. Тамму, И. М. Франку, П. А. Черенкову, Л. Д. Ландау, А. М. Прохорову, Н. Г. Басову, Л. В. Канторовичу. Многие отечественные научные журналы регулярно переводятся и переиздаются за рубежом.

Читатели «Кванта» — современники научно-технической революции, ее активные участники в будущем. Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев в своей речи на XXIV съезде КПСС поставил перед всем нашим народом историческую задачу: «Органически соединить достижения научно-технической революции с преимуществами социалистической системы хозяйства, шире развивать свои, присущие социализму формы соединения науки с производством». Решение этой задачи связано с дальнейшим развитием и совершенствованием советской науки.

Октябрьская революция широко открыла молодежи доступ к образованию. В 1914 году в школах России обучалось 9,6 миллиона учащихся, из которых более 9 миллионов посещали начальную школу и лишь 625 тысяч (т. е. около 7% от общего числа учеников) имели возможность продолжать свое образование. В 1976 году в СССР было 46,5 миллиона учащихся средних школ; каждый из них должен получить среднее образование. На каждую тысячу жителей царской России приходилось 56 школьников; сейчас число школьников на тысячу жителей нашей страны составляет 181. В советских школах работает в 10 раз больше учителей, чем в школах дореволюционной России.

Достоинства советской школы широко известны всему миру. Недаром сразу же после запуска первого искусственного спутника Земли американцы приступили к реорганизации среднего образования в своей стране, публично признав превосходство нашей школы.

Партия и правительство уделяют большое внимание развитию интереса молодежи к науке. В нашей стране создано много специальных физико-математических школ, в том числе и заочных — доступных самым широким слоям учащихся. Ежегодно проводятся олимпиады школьников, в которых участвуют сотни тысяч учеников. Многие школы поддерживают тесную связь с научно-исследовательскими учреждениями. Весной 1977 года ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения СССР, Всесоюзный совет научно-технических обществ и Всесоюзное общество «Знание» приняли совместное постановление о создании в каждой республике специальных научных обществ учащихся. (О работе одного из таких обществ — Молдавского научного общества учащихся ВИИТОРУЛ (БУДУЩЕЕ) — рассказано в апрельском номере нашего журнала за этот год.)

Этим же целям — развитию интересов молодежи к науке и укреплению связи между наукой и школой — служит и журнал «Квант», родившийся по инициативе ученых, поддержанной руководителями нашего государства.

Молодые ученые внесли огромный вклад в развитие отечественной науки после победы Октября. На примере физико-математических наук об этом подробно рассказано в статьях о развитии советской физики и математики, публикация которых началась в 10 номере нашего журнала.

Советский Союз получает необходимые ему научные кадры из недр своего народа — бесконечно талантливого и неповторимо оригинального. Недаром еще в 1966 году один из крупнейших американских математиков, принимавших участие в работе Международного конгресса математиков в Москве, на вопрос журналистов: «Что произвело на Вас наибольшее впечатление в ходе работы конгресса?», — ответил так: «Больше всего меня поразило обилие талантливых молодых математиков в вашей стране».

Молодыми пришли в науку академики И. В. Курчатов, Н. Н. Семенов, П. Л. Капица, Л. Д. Ландау, Л. А. Арцимович, Ю. Б. Харитон, Я. Б. Зельдович, А. Н. Колмогоров, Н. Н. Боголюбов, С. Л. Соболев и тысячи других крупных советских ученых. Молодежь и сегодня составляет большую часть научных работников нашей страны. И в этом — залог дальнейшего расцвета советской науки.

И. Кикоин

Как создавалась советская физика

Мы продолжаем публикацию воспоминаний Героя Социалистического Труда, академика И. К. Кикоина, начатую в 10 номере.

В конце 30-х годов академик Абрам Федорович Иоффе поставил перед своими сотрудниками новую задачу: исследовать особый по своим электрическим свойствам класс веществ — полупроводники. Как известно, полупроводники — это вещества, проводимость которых слишком мала, чтобы считать их металлами, и слишком велика, чтобы относить их к диэлектрикам.

В то время полупроводники не имели широкого применения. И тем не менее, Иоффе, интуитивно понимая, что в будущем они приобретут большое практическое значение, с самого начала уделял много внимания работам по исследованию их свойств. А исследования эти были нелегкими. И вот почему. У разных образцов одного и того же по химическому составу полупроводника физические характеристики оказывались совершенно различными. Например, у разных образцов закиси меди (Cu_2O) проводимость оказывалась различной, так же как и зависимость проводимости от температуры. Полученные разными способами образцы вели себя одни как диэлектрики, другие — как проводники. Ясно, что выявить какие-то общие закономерности, исследуя столь «капризные» вещества, очень трудно. И связано это с тем, что, как оказалось, свойства полупроводников необычайно сильно зависят от ничтожных количеств примесей, имеющихся в образцах. Например, если в образце закиси меди атомов кислорода на стотысячную долю процента больше, чем в «чистой» закиси меди (то есть при точном химическом соотношении меди и кислорода), то он ведет себя как проводник, хотя чистая закись меди — диэлектрик.

Эта особенность полупроводников в каком-то смысле предопределила направление исследований. Прежде всего необходимо было установить, как зависят свойства полупроводников от количества содержащихся в них примесей. А для этого надо было иметь образцы с точно известным химическим составом и количеством примесей.

В эти работы очень активно включился Борис Васильевич Курчатов (брат И. В. Курчатова). Он нашел способ получения образцов закиси меди с заданным избыточным количеством кислорода. Создав несколько таких образцов, он исследовал, как меняется проводимость закиси меди в зависимости от примеси кислорода. Оказалось, что проводимость резко растет с увеличением количества примеси. Эта классическая работа положила начало созданию полупроводников с заданными свойствами введением определенного количества той или иной примеси. Сейчас они находят огромное практическое применение.

После того как Абрам Федорович Иоффе переключил наше внимание на полупроводники, я решил заняться исследованием так называемого внутреннего фотоэффекта. Явление это заключается в том, что под действием света в полупроводнике появляются дополнительные свободные электроны и проводимость образца увеличивается. Мне хотелось выяснить, обладают ли эти дополнительные электроны той же подвижностью, что и темновые электроны (то есть свобод-

ные электроны, которые имеются в неосвещенном образце). А получить такую характеристику, как подвижность электронов, можно было, измеряя эффект Холла и проводимость образца. Поэтому было решено исследовать этот эффект в полупроводниках. (Напомню, что эффект Холла заключается в том, что если поместить образец, по которому течет ток, в магнитное поле, то между точками образца, лежащими на прямой, перпендикулярной направлению поля и направлению тока, возникает разность потенциалов — э. д. с. Холла.

Начав исследования, мы столкнулись со странным явлением, которое мешало проводить измерения. Принципиальная схема эксперимента была приблизительно такой, как на рисунке 1. И мы с изумлением обнаружили, что при освещении образца в магнитном поле даже при отсутствии текущего через образец тока прибор регистрировал наличие разности потенциалов между точками A и A', на которых мы собирались измерять э. д. с. Холла. Чтобы измерить «чистую» э. д. с. Холла, надо было как-то устранить этот побочный эффект. И мы его устранили. Оказалось, что если пластинку закиси меди, с которой мы проводили измерения, освещать не белым, а красным светом (а сама закись меди — это прозрачный кристалл красного цвета), то побочный эффект исчезает, и можно измерить «чистую» э. д. с. Холла, определить тот «вклад», который дают в нее фотоэлектроны, и вычислить их подвижность. Она оказалась такой же, как и у темновых электронов. (Сейчас я не стал бы проводить подобных исследований, потому что теперь хорошо известно, что рождающиеся под действием света фотоэлектроны тотчас же сталкиваются с атомами и в дальнейшем по своим свойствам ничем не отличаются от темновых электронов.)

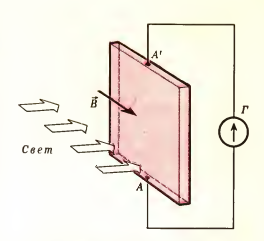


Рис. 2. Схема эксперимента, в котором был обнаружен фотоэлектромагнитный эффект. Здесь индукция магнитного поля направлена параллельно поверхности пластинки. В направлении, перпендикулярном поверхности, на пластинку падает свет. В точках A и A′ измерялась э. д. с.

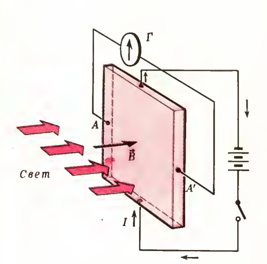


Рис. 1. По такой схеме мы ставили эксперимент, в котором хотели измерить э. д. с. Холла в полупроводнике. Пластинка, по которой течет ток, помещена в магнитное поле, индукция которого перпендикулярна поверхности пластинки. Эта поверхность освещается пучком света. В точках A и A′, находящихся на одинаковых расстояниях от краев пластинки, измеряется э. д. с. Холла.

После этого надо было выяснить, с чем связан возникавший побочный эффект. Мы взяли в качестве образца пластинку из закиси меди длиной около двух сантиметров, присоединили к ней с помощью электродов измерительный прибор, поместили пластинку в магнитное поле, параллельное плоскости пластинки, и осветили ее светом от сильной лампы. Схема опыта была такая, как на рисунке 2. Оказалось, что при небольшом магнитном поле — порядка 1 Т — на-



И. К. Кикоин

пряжение на электродах достигало 20 В!

Явление было совершенно непонятным. И когда на одном из семинаров у нас в Физико-техническом институте я докладывал об этой работе, слушатели отнеслись к моему рассказу очень недоверчиво. Я тут же перед аудиторией продемонстрировал наш простой опыт. И хотя сомнения в существовании самого эффекта пропали, загадочность его не уменьшилась. Качественная и количественная теория этого эффекта (мы назвали его тогда фотомагнитным) была разработана позже. Не буду сейчас более подробно рассказывать об этом эффекте, потому что в одном из ближайших номеров журнала появится статья на эту тему. Скажу только, что, исследуя этот эффект в полупроводниках, можно выяснить целый ряд их свойств, которые важны в технике.

Описанными выше работами, конечно, не исчерпывается круг исследований полупроводников, проводившихся в Ленинградском физико-техническом институте. Под руководством А. Ф. Иоффе и при его непосредственном участии осуществлялась обширная программа работ по выяснению природы электрических и фотоэлектрических явлений в полупроводниках. Одновременно разрабатывались вопросы практического применения этих явлений.

Одним из основных направлений научной работы в Физико-техническом институте было также изучение электрических свойств диэлектриков. В числе сотрудников, занимавшихся этим вопросом, был Игорь Васильевич Курчатов. Лаборатория, которую он тогда возглавлял, занялась исследованием свойств так называемой сегнетовой соли (химическая формула $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$). Кристаллы сегнетовой соли очень красивы. Они достигают огромных размеров. Я с удовольствием наблюдал, как Игорь Васильевич выращивал их из растворов в больших стеклянных сосудах.

Сегнетова соль — типичный представитель диэлектриков с аномальной диэлектрической проницаемостью. (Напомним, что диэлектрическая проницаемость — это число, указывающее, во сколько раз электрическое поле внутри диэлектрика меньше того внешнего поля, в котором находится диэлектрик.) Так вот, у обычных диэлектриков проницаемость порядка нескольких единиц (у стекла—$3 \div 5$, у слюды—$7 \div 8$); диэлектрическая проницаемость воды, равная 80, считалась аномально большой. А у сегнетовой соли значение этой величины может достигать нескольких десятков тысяч единиц! И еще одна аномалия — необычное «поведение» этой проницаемости при изменении внешнего электрического поля: в сильных полях значение ее невелико, а в слабых полях она достигает огромных значений. Естественно, что исследование свойств сегнетовой соли представляло большой интерес. Используя ее как заполнитель, можно было создать конденсаторы небольших размеров с очень большой емкостью. Правда, аномальные свойства сегнетовой соли проявляются в довольно узкой области температур (примерно от —30°C до +30°C).

Подробными исследованиями Курчатов показал что поведение сегне-

тоэлектриков (так иазывают днэлектрики с такимн же аиомальиымн свойствами, как у сегиетовой соли) во миогом аиалогично поведеиию ферромагнетнков. Например, зависимость электрнческой нидукцни (так называют электрнческое поле внутрн вещества) в сегиетоэлектриках от величииы виешнего электрического поля аналогичиа зависнмостн магиитной иидукцнн в ферромагнетнках от внешнего магнитного поля. В крнсталлнческнх сегиетоэлектрнках, так же как н в ферромагиетиках, наблюдается резкая аиизотропня свойств: их электрнческие характеристики существенно завнсят от орнеитацнн внешнего поля относительио различных осей крнсталла. Нагревая сегнетоэлектрикн, наблюдают, что прн переходе через «критическую» температуру (для сегиетовой солн, как мы уже говорили, это $\sim 30°C$) нх электрические свойства скачком меияются — исчезает аномалня диэлектрнческой проницаемости и в дальнейшем оин ведут себя как обычные диэлектрики. Это явленне совершенио аналогнчио поведеиию ферромагнетнков прн переходе через точку Кюрн — когда оии переходят нз ферромагиитного состояиия в парамагнитное. Исследуя переход сегиетоэлектрнков через точку Кюрн (так по аиалогнн называют крнтнческую температуру для сегиетоэлектриков), Курчатов показал, что, так же как н в случае ферромагиетиков, этот переход сопровождается выделеиием тепла. Этот эффект теперь называется электрокалорнческнм эффектом (аиалогнчный эффект для ферромагиетиков называется магиетокалорическим). Сходство между сегнетоэлектрнчеством н ферромагиетнзмом так велико, что зарубежные ученые называют явленне сегнетоэлектричества ферроэлектрнчеством.

Результаты своих нсследований И. В. Курчатов собрал в отдельиую киигу, которая повсюду была призиана как фундамеитальное нсследоваине явлення сегнетоэлектричества.

Несколько позже в Фнзнческом нннтитуте нмеин П. Н. Лебедева



А. Ф. Иоффе (слева) со своими учениками А. И. Алнхановым и И. В. Курчатовым в одной из лабораторий физико-технического института.



Б. М. Вулл

АН СССР в лаборатории Бенциона Моисеевича Вула (ученика А. Ф. Иоффе, ныне — академика) были обнаружены сегнетоэлектрические свойства у целого ряда химических соединений, в частности, у метатитаната бария ($BaTiO_3$). Этот сегнетоэлектрик имеет важное практическое значение. Дело в том, что у него точка Кюри значительно выше, чем у сегнетовой соли — около 80°С. Поэтому область его практического применения гораздо шире.

Одной из проблем, которой особенно интересовался А. Ф. Иоффе и которой много занимались в лабораториях физико-технического института, было изучение электрического пробоя диэлектриков. Важно было сделать диэлектрики более надежными, то есть повысить напряженность электрического поля, при которой происходит пробой. Занимался этим в своей лаборатории и Николай Николаевич Семенов.

В то время существовало несколько теорий пробоя. Одна из них исходила из того, что под действием электрического тока диэлектрик разогревается. Это означает, что носители тока сталкиваются с атомами диэлектрика и отдают им свою энергию. При нагреве же диэлектрика в нем очень быстро увеличивается количество носителей тока. Растет ток, а это приводит к еще большему разогреву и лавинообразному увеличению количества носителей. Проводимость диэлектрика нарастает, и наконец, происходит пробой.

Н. Н. Семенов заинтересовался отдельным актом образования новых носителей тока. Его интересовал вопрос, каков механизм столкновения молекул или атомов и как, в частности, при столкновении молекул происходят химические реакции между ними. Семенов с сотрудниками начал изучать реакцию взаимодействия газообразного фосфора с кислородом, при которой образуется хорошо известное твердое соединение — пятиокись фосфора (P_2O_5). Так как образование пятиокиси фосфора связано с выделением энергии, газ начинает светиться. Это свечение и регистрировалось в лаборатории. Неожиданно оказалось, что при достаточно низких давлениях кислорода (несколько стотысячных долей атмосферы) свечение вообще не возникало — пары фосфора не вступали в реакцию с кислородом! Выяснилось также, что реакция снова начинается, если, не добавляя кислород, ввести в сосуд инертный газ аргон, который не способен ни к каким химическим реакциям, но зато повышает давление в сосуде. Это было удивительно и противоречило существовавшим представлениям о механизме химических реакций, из которых следовало, что фосфор должен вступать в реакцию с кислородом при любых парциальных давлениях газов.

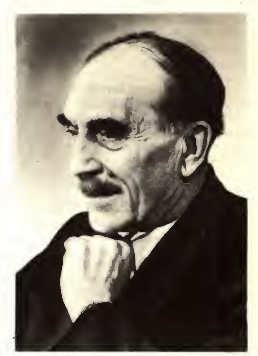
Так было открыто существование критического давления для реакции соединения фосфора с кислородом.

Эта работа была опубликована в немецком физическом журнале, а вскоре появилась критическая заметка крупнейшего тогда специалиста по кинетике химических реакций немец-

кого химика Боденштейна. Он писал, что опыты Н. Н. Семенова неубедительны. Давление кислорода измерялось в них манометром, а чтобы пары фосфора не повредили его, между манометром и сосудом, в котором происходила реакция, помещали ловушку, охлаждаемую жидким воздухом. Пары фосфора конденсировались в ловушке, благодаря чему возникал поток паров фосфора, направленный к ловушке. Кислород же по пути в сосуд также проходил мимо ловушки, но в направлении, противоположном направлению потока паров фосфора. Боденштейн считал, что при небольших давлениях кислорода он просто «сдувался» парами фосфора и вовсе не попадал в сосуд, так что реакция не возникала, потому что в сосуде не оказывалось кислорода.

Ознакомившись с этой заметкой, Семенов решил повторить свои опыты. При этом он убедился, что критика Боденштейна частично верна — давление кислорода действительно измерялось не совсем точно. Но и после исключения возможных ошибок оказалось, что реакция взаимодействия фосфора с кислородом в газообразном состоянии все-таки начинается только при некотором минимальном давлении. При этом было обнаружено еще одно совершенно непонятное явление. Само критическое давление зависело от размеров сосуда, в котором происходила реакция. Если сосуд шарообразный, то критическое давление растет пропорционально диаметру сосуда. Чем больше сосуд, тем больше давление, при котором начинается реакция. Как писал позже Н. Н. Семенов, обнаружив это явление, он совсем перестал что-либо понимать.

Семенов рассказал о своей работе на семинаре в Физико-техническом институте. Все уже знали критику Боденштейна и снова стали придираться к опытам. Как ни убеждал Семенов присутствовавших в том, что никаких ошибок в его опытах больше нет, к этому отнеслись с недоверием, тем более что объяснить столь странные результаты Николай Николаевич в то время не мог.



Н. Н. Семенов

Будучи твердо уверенным в своей правоте, Н. Н. Семенов опубликовал несколько статей о полученных результатах. После этого пришло письмо от Боденштейна, в котором он полностью согласился с этими результатами, признал большое значение обнаруженных явлений и предложил Семенову дальнейшие работы печатать в журнале, который он сам редактировал. Вскоре после этого Н. Н. Семенов создал качественную теорию обнаруженных им явлений.

Это было крупнейшее открытие, которое получило всемирное признание. Оно послужило началом нового направления в науке — изучения разветвленных цепных химических реакций, которое успешно развивалось не только у нас, но и за рубежом. За эти работы Н. Н. Семенову, вместе с английским химиком Хиншельвудом, который занимался теми же вопросами, в 1956 году была присуждена Нобелевская премия.

Н. Н. Семенов — основатель целой школы по кинетике химических реакций. К ней принадлежит много ученых. Крупнейшими ее представителями являются академики Юлий

Борисович Харитон и Виктор Николаевич Кондратьев. Ю. Б. Харитон проделал много работ, связанных с химическими реакциями взрывного характера. Крупнейшим теоретиком в этой области является еще один ученик Семенова — академик Яков Борисович Зельдович. Он разработал и теорию цепных реакций, и теорию горения. Эти теории имеют большое значение для техники, в частности, для взрывной техники.

В 1928 году на одном из очередных семинаров Абрам Федорович Иоффе сказал: «Я должен вам прочитать небольшую заметку, оттиск которой мне прислал профессор Раман из Индии». Это был оттиск заметки, которую опубликовали в известном английском журнале «Nature» (по-русски — «Природа»). В нем есть раздел под названием «Письма к редактору», где ученые обычно кратко сообщают о своих новых работах. Журнал этот еженедельный, и поэтому можно быстро опубликовать необходимую информацию.

В заметке Рамана шла речь о том, что при рассеянии света в жидкости спектр рассеянного света отличается от спектра падающего света. Если жидкость освещается светом определенной длины волны, например, желтым, то в рассеянном свете содержится та же самая длина волны (тот же цвет), но, кроме того, появляются еще другие цвета, новые спектральные линии. В этом и заключается явление, о котором писал Раман, — появление дополнительных линий в спектре рассеянного жидкостью света.

Когда Иоффе прочитал эту заметку, сидевший рядом со мной профессор Рожанский, который обычно на семинарах внимательно слушал, но редко выступал, вдруг проявил необычайную взволнованность. Он встал и сказал: «Я ничего не понимаю. Я хорошо знаю, что работы, о которых рассказывается здесь, были проделаны Мандельштамом в Москве примерно два года тому назад. Мне точно известно, что это явление было открыто Мандельштамом на кристаллах,



Л. И. Мандельштам

и в течение двух лет он тщательно его исследовал». Так мы — молодые физики — узнали, что в Москве существует крупная научная школа физиков, возглавляемая Леонидом Исааковичем Мандельштамом.

Из заметки Рамана следовало, что он только что сделал свое открытие. А Леонид Исаакович Мандельштам, как мы узнали, не только обнаружил это явление, но вместе с Григорием Самуиловичем Ландсбергом провел подробное исследование, нашел основные закономерности, дал полную теорию этому явлению и уже направил в печать обстоятельную статью. Но она была получена редакцией журнала, в который ее послал Мандельштам, на две недели позже, чем заметка Рамана в «Nature». Эта заметка была продиктована по радио, поскольку Раман очень торопился. К сожалению, эффект появления дополнительных спектральных линий в рассеянном свете теперь нередко называют эффектом Рамана. Правда, объективные зарубежные ученые, вскоре после того как это явление было открыто, в соответствующих обзорах и книгах называли его эффектом Мандельштама — Ландсберга — Рамана.



Г. С. Ландсберг

К концу 20-х годов Ленинградский физико-технический институт стал всемирно известным. А. Ф. Иоффе понимал, что в такой большой стране как Советский Союз нельзя концентрировать всю науку практически в двух городах—Ленинграде и Москве. Он неоднократно и настойчиво обсуждал этот вопрос как со своими сотрудниками, так и в руководящих инстанциях. И в конце концов выкристаллизовалась точка зрения, что необходимо создать еще несколько физико-технических институтов в крупных промышленных центрах СССР.

Крупнейшей республикой наряду с Россией была Украина, ее столицей тогда был Харьков. Абрам Федорович решил, что именно в Харькове надо организовать физико-технический институт. По его инициативе выделили из среды сотрудников Ленинградского физико-технического института группу молодых квалифицированных физиков и направили ее в Харьков. Директором Харьковского института был назначен Иван Васильевич Обреимов, а его заместителем — ученик Семенова Александр Ильич Лейпунский (оба они потом стали академиками). В эту группу входил также ученик А. Ф. Иоффе К. Д. Синельников, ученик Я. И. Френкеля теоретик Я. Горовец и другие. Приглашали туда и меня. Я был даже склонен поехать, потому что туда отправились многие друзья и товарищи, но возражало начальство. Н. Н. Семенов, который замещал тогда бывшего за границей А. Ф. Иоффе, запротестовал, говоря, что „институт и так сильно обескровлен и нельзя забирать еще совсем молодых людей. В результате я остался в Ленинграде.

Все это происходило в то время, когда XV съезд партии утвердил директивы первого пятилетнего плана развития народного хозяйства страны. Начался бурный рост промышленности, потребность в специалистах резко увеличилась. Молодые люди, еще не окончившие институт, уже зачислялись на постоянную работу в соответствующие учреждения.

Именно в это время и был организован Украинский физико-технический институт (УФТИ) в Харькове. Первой его лабораторией стала криогенная лаборатория, в которой имелась техника, позволяющая получать жидкий гелий и проводить исследования при температуре около 4 К. Ее создание было связано с тем, что незадолго до организации УФТИ И. В. Обреимов около года работал в Голландии в знаменитой Лейденской лаборатории — первой криогенной лаборатории мира. Там же работал еще один сотрудник нового института — Л. В. Шубников. Они сделали в Лейдене несколько превосходных исследований и заказали криогенное оборудование, что и позволило быстро создать лабораторию в Харькове. Украинский физико-технический институт был первой ласточкой, выпорхнувшей из стен Ленинградского физико-технического института. Достижения сотрудников УФТИ известны сейчас во всем мире.

А. Ф. Иоффе считал, что создание УФТИ не решает проблему рассредоточения науки. Вскоре по его инициативе такие же институты были созданы в Томске и Днепропетровске. В Томск поехала группа ленинград-



Г. В. Курдюмов

ских физиков во главе с Петром Саввичем Тартаковским, а в Днепропетровск — во главе с Георгием Вячеславовичем Курдюмовым, ныне академиком.

К сожалению, в Томске инициатива ленинградских физиков не встретила большой поддержки со стороны местных физиков, и этот институт практически распался. Зато институт, организованный в Днепропетровске, быстро окреп и прославился своими работами. В первую очередь это объясняется тем, что он находился в центре украинской металлургии, а сам директор института Г. В. Курдюмов был крупнейшим специалистом именно в этой области. Работы, которые он проделал еще в Ленинградском физико-техническом институте, относились к рентгенографическому исследованию одного из важнейших процессов металлургии — мартенситных превращений в сталях. Курдюмов впервые показал, в чем заключается природа мартенситных превращений, которые происходят при закалке стали. Эта классическая работа снискала ему всемирную известность. Она имеет важнейшее техническое значение.

В 1932 году из состава Ленинградского физико-технического института был выделен Уральский физико-технический институт (Урал ФТИ), обосновавшийся позднее в Свердловске — крупнейшем промышленном центре Урала. Туда был включен и я. Хотя мы и назывались Уральским физико-техническим институтом, но до постройки здания в Свердловске работали в Ленинграде и переехали в Свердловск только в 1936 году. Ныне этот институт называется институтом физики металлов; он стал одним из крупнейших физических институтов нашей страны. Сейчас им руководит известный физик-теоретик академик Сергей Васильевич Вонсовский, который в момент создания института был молодым сотрудником, только что окончившим университет.

В период первой пятилетки физика в нашей стране очень бурно развивалась, и количество научных сотрудников быстро росло. Я помню, что при мне за 1927—1930 годы Ленинградский физико-технический институт вырос раза в три. В конце концов из него выделились несколько самостоятельных институтов: Институт химической физики под руководством Н. Н. Семенова, который впоследствии переехал в Москву; Институт связи во главе с профессором Д. А. Рожанским; Высоковольтный институт под руководством А. А. Чернышева. Был организован также Агрофизический институт, который возглавил сам А. Ф. Иоффе. Он считал, что физику надо применять не только в промышленности, но и в сельском хозяйстве.

Таким образом, начиная с 1928 года, руководствуясь решениями партии и правительства и собственной инициативой, А. Ф. Иоффе сумел насадить физические институты в ряде промышленных центров Советского Союза, что немало способствовало развитию науки и промышленности в нашей стране. Ленинградский физико-технический институт стал свое-

образным рассадником физики по всему Советскому Союзу.

В 1934 году в Советский Союз вернулся из Англии, из длительной научной командировки, известный физик Петр Леонидович Капица. Во время работы в Англии он прославился тем, что исследовал ряд свойств веществ в сильных магнитных полях. Обычные магнитные поля, которые создавали в лабораториях в то время, были порядка 1—2 Т. Для получения более сильных полей нужно было применять электромагниты больших размеров, которые стоили очень дорого. Можно, конечно, создать сильные магнитные поля внутри соленоида без железа. Но для этого необходимо питать соленоид очень сильным током, что связано с большим выделением тепла и перегревом обмотки соленоида.

Капица рассуждал так. Не обязательно иметь постоянное большое поле в течение длительного времени. Явления, происходящие в веществе, помещенном в магнитное поле, носят атомный характер. А подобные явления разыгрываются очень быстро — за миллионные и даже миллиардные доли секунды. Поэтому достаточно создать сильное магнитное поле, существующее в течение короткого промежутка времени, и за это время провести в нем необходимые исследования. Эту идею Капица осуществил следующим образом. Магнитное поле создавалось в соленоиде, через который пропускался большой ток от генератора переменного тока в течение одного полупериода (0,01 секунды).

Якорь генератора переменного тока раскручивали с помощью электродвигателя. При этом клеммы генератора были разомкнуты. Когда якорь раскручивался до расчетного (номинального) числа оборотов, двигатель отключали, и якорь продолжал вращаться по инерции. Напряжение на разомкнутых клеммах обмотки (э.д.с.) при этом менялось по синусоидальному закону. В тот момент, когда оно «проходило» через нуль, с помощью специального рубильника клеммы генератора замыкали на обмотку соленоида. А через половину периода, то есть через 0,01 секунды, когда напряжение снова падало до нуля, цепь размыкалась. Размыкание цепи необходимо проводить в момент, когда ток проходит через нуль, чтобы избежать возникновения электрической дуги. В течение полупериода по обмотке протекал ток большой силы (и следовательно, существовало большое магнитное поле), а катушка не успевала сильно нагреться. Но возникала еще одна трудность. Когда через соленоид протекает ток, на каждый его виток действуют радиальные силы, стремящиеся его разорвать. При достаточно большом токе эти силы могут превзойти предел прочности материала обмотки, и она разрушится. (Петр Леонидович рассказывал, что когда он в Англии в лаборатории впервые проводил этот эксперимент, катушка разорвалась, ее обломки разлетелись в разные стороны. И в тот же день сотрудники лаборатории поспешили застраховать свою жизнь.) Так что возможность получения сильных магнитных полей таким способом ограничивается прочностью материала, из которого сделана обмотка. Капица сделал обмотку из специальной высокопрочной бронзы. Катушка была небольшая — диаметр ее был около 25 мм, длина — около 100 мм. Через эту катушку пропускали в течение сотой доли секунды ток, который позволял получать поле около 30 Т.

В таких полях Капица исследовал ряд физических явлений. В частности, он очень подробно изучил влияние магнитного поля на сопротивление проводников. При малых полях изменение сопротивления проводников в магнитном поле растет примерно пропорционально квадрату магнитной индукции. Предполагалось, что и в сильных полях будет такая же зависимость. Но оказалось, что в сильных полях квадратичная зависимость изменения сопротивления от величины магнитной индукции нарушается. Была обнаружена совершенно иная закономерность — линейная зависимость изменения сопротивления проводника от величины индукции магнитного поля.



П. Л. Капица (слева) и И. В. Обреимов на семинаре в Институте физических проблем.

Большой интерес представляло исследование свойств различных веществ в условиях, когда сильные магнитные поля сочетаются с низкими температурами. И Капица занялся рассмотрением вопроса о способах получения низких температур, близких к абсолютному нулю. Известно, что самой низкотемпературной жидкостью является жидкий гелий. При нормальном давлении температура кипения жидкого гелия равна 4,2 К.

Впервые жидкий гелий был получен голландским ученым Камерлинг-Оннесом в 1908 году. Установка, которую он построил в своей лаборатории в Лейдене, позволяла получать небольшое количество жидкого гелия. Подобные установки были очень дороги. П. Л. Капица разработал более производительную и экономичную установку, на которой он мог получать достаточно большое количество жидкого гелия.

К тому времени физики заинтересовались свойствами самого жидкого гелия. Дело в том, что жидкий гелий — единственное вещество, которое, как говорят, претерпевает фазовое превращение, находясь в жидком состоянии: при температуре 2,19 К его физические свойства резко меняются. Выше этой температуры гелий ведет себя как обыкновенная жидкость, а при $T \leqslant 2{,}19$ К у него появляется ряд совершенно необычных свойств: теплопроводность его резко возрастает, а вязкость резко падает. Принято называть гелий при температуре выше 2,19 К гелием I, а при $T \leqslant 2{,}19$ К — гелием II.

Впервые гелий II обнаружил Камерлинг-Оннес. Потом его изучением занялся в Лейденской лаборатории Кеезом. Он обнаружил, что теплопроводность гелия II во много раз больше, чем у самых теплопроводных металлов. Поэтому Кеезом назвал гелий II сверхтеплопроводным веществом.

П. Л. Капица занялся исследованием свойств гелия II в 1937 году. Анализируя имевшиеся к тому времени экспериментальные данные, он пришел к выводу, что чрезвычайно высокую теплопроводность гелия II нельзя объяснить обычными процессами выравнивания температуры

внутри вещества. Он предположил, что интенсивная передача тепла в гелии II может быть связана с конвекцией. Подсчеты показали, что конвекционные потоки должны осуществляться в гелии II с необычайной легкостью, без трения. Можно было предполагать, что гелий II является сверхтекучей жидкостью, то есть жидкостью, которая не имеет вязкости.

Чтобы проверить это предположение, Петр Леонидович в 1938 году поставил такой эксперимент. Он пропускал гелий II через зазор между двумя плоскими полированными стеклянными пластинками, прижатыми друг к другу. Пластинки были отполированы так тщательно, что зазор между ними был не более полумикрона. И через такой зазор под действием собственной тяжести гелий II протекал со скоростью, которая возможна только при почти полном отсутствии вязкости!

Так было открыто явление сверхтекучести в гелии II.

Оставалась нерешенной еще одна загадка, связанная с измерением вязкости гелия II. Дело в том, что вязкость можно определить двумя способами. Один из них — измерение скорости истечения жидкости из капиллярного сосуда (или через узкую щель, как это было в экспериментах П. Л. Капицы). При данной разности давлений на концах капилляра количество протекающей через него жидкости за данное время тем больше, чем меньше ее вязкость. Второй способ определения вязкости — исследование затухания крутильных колебаний твердого тела в жидкости. В жидкость на нити опускают тонкий диск так, чтобы плоскость его была горизонтальной, и наблюдают его собственные крутильные колебания вокруг оси, проходящей через нить. Естественно, что чем больше вязкость жидкости, тем быстрее затухают колебания. Для всех жидкостей значения вязкости, измеренные этими двумя способами, были одинаковыми. А для гелия II эти значения были различными. Первый способ давал исчезающе малое значение вязкости, демонстрируя сверхтекучесть гелия II, а второй приводил к малым, но вполне измеримым значениям.



Л. Д. Ландау

Ответ на все эти вопросы дала гидродинамическая теория сверхтекучести, созданная в 1941 году академиком Львом Давидовичем Ландау. Он показал, что обычный классический подход для объяснения свойств вещества при столь низких температурах, неверен. Ландау удалось разработать квантовую теорию сверхтекучести He II. Она блестяще объяснила результаты опытов Капицы и предсказала ряд новых явлений, которые вскоре были обнаружены экспериментаторами.

Сверхтекучесть жидкого гелия пока не нашла широкого применения. Но созданная Ландау теория сверхтекучести оказала большое влияние на развитие теоретической физики. Она явилась ключом к созданию теории другого замечательного явления, происходящего при низких температурах — сверхпроводимости. И хотя это произошло значительно позже, мне кажется, будет уместно рассказать об этом именно сейчас, нарушая хронологический порядок, которого я

старался более или менее придерживаться.

Напомню, что явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Он обнаружил, что при температуре 4,15 К электрическое сопротивление ртути полностью исчезает, и назвал это явление сверхпроводимостью. После этого было обнаружено, что многие металлы и сплавы при низких температурах теряют электрическое сопротивление, становятся сверхпроводящими. Разумеется, существование проводников без сопротивления сулило заманчивые практические перспективы, и изучением сверхпроводимости физики занялись очень активно. Однако создать общую теорию явления не удавалось.

После создания квантовой механики была построена микроскопическая теория твердого тела, то есть теория, которая рассматривала свойства твердых тел с точки зрения поведения электронов и атомов. Она полностью качественно объясняла все свойства металлов, диэлектриков, полупроводников в различных условиях. А сверхпроводимость оставалась загадочным явлением. И только в 1957 году, то есть через 46 лет после открытия этого явления, оно получило свое объяснение в микроскопической теории, созданной советским ученым академиком Николаем Николаевичем Боголюбовым и, независимо от него, американскими физиками Бардином, Купером и Шриффером (БКШ, как называют эту группу).

К тому времени экспериментально были изучены многие свойства сверхпроводников. Было установлено, что под действием магнитного поля сверхпроводимость металлов разрушается — они становятся обычными проводниками. Значение магнитной индукции поля, при котором исчезает сверхпроводимость, называется критическим полем (критической индукцией). У разных металлов эта величина различна. Критическое поле зависит от температуры сверхпроводника. Чем выше температура, тем меньше критическое поле. При критической температуре критическое поле равно нулю.

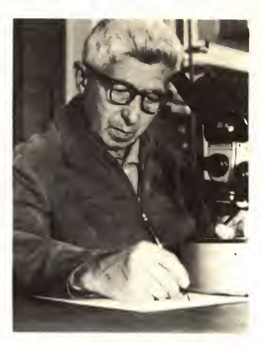
Далее было также показано, что магнитное поле внутрь сверхпроводника не проникает, а если оно в металле уже было, то при его переходе в сверхпроводящее состояние (при понижении температуры) оно выталкивается наружу. Таковы самые фундаментальные свойства сверхпроводников.



Л В Шубников

Когда они были обнаружены, стало ясно, что возможности использования сверхпроводников для получения больших незатухающих токов и создания сильных магнитных полей ограничены. Действительно, ток, текущий по проводнику, сам создает магнитное поле. Чем больше ток, тем больше это поле. Но как только индукция этого поля достигнет критического значения, сверхпроводник перейдет в нормальное состояние. Опыты показали, что значения критических полей невелики — порядка 10^{-2}—10^{-1} Т.

Микроскопическая теория сверхпроводимости была создана в 1957 году. Но это не означает, что до тех пор не существовало никакой теории сверхпроводников. Многочисленные экспериментальные данные позволяли ученым устанавливать связь между различными величинами, характеризующими свойства и поведение сверхпроводников.



А. И. Шальников

Так, в 1937 году Л. Д. Ландау, анализируя имевшиеся к тому времени экспериментальные данные, теоретически предсказал новое явление, относящееся к процессу перехода металла из сверхпроводящего состояния в нормальное в магнитном поле. Согласно его теории, этот переход происходит постепенно. Начиная с некоторого значения индукции магнитного поля, еще не достигнего критического, поле частично проникает в сверхпроводник. При этом в нем образуются чередующиеся слои — сверхпроводящие и несверхпроводящие. При достижении критического значения индукции внешнего поля сверхпроводящее состояние полностью разрушается.

Опыты, которые в скором времени были проведены в Харьковском физико-техническом институте Львом Васильевичем Шубниковым и в Московском институте физических проблем членом-корреспондентом АН СССР Александром Иосифовичем Шальниковым, блестяще подтвердили предсказания теории Ландау. Мне довелось наблюдать эти эксперименты и в Москве, и в Харькове. Они наглядно продемонстрировали структуру «сложного» промежуточного состояния, так сказать, топографию чередующихся сверхпроводящих и нормальных слоев внутри сверхпроводящего шара. Такое состояние сверхпроводника за рубежом обычно называют «фазой Шубникова».

В 1950—1952 годах группа советских физиков — академики Виталий Лазаревич Гинзбург и Лев Давидович Ландау, члены-корреспонденты АН СССР Алексей Алексеевич Абрикосов и Лев Петрович Горьков — разработала теорию, из которой следовало, что должны существовать сверхпроводники с необычными свойствами. Теперь ее называют теорией ГЛАГ (Гинзбург, Ландау, Абрикосов, Горьков). Такие сверхпроводники назвали сверхпроводниками второго рода, в отличие от обычных сверхпроводников. Для них значения критического поля должны были быть значительно бóльшими.

Очень скоро были проведены эксперименты, которые полностью оправдали эти предсказания. Как оказалось, к сверхпроводникам второго рода принадлежат металлический ниобий и целый ряд сплавов. Значения критических полей для таких сверхпроводников, действительно, оказались очень большими. Так, например, у сплава ниобия с оловом оно достигает 20—30 Т. Большое значение критического поля позволяет использовать сверхпроводники второго рода для создания сильных магнитных полей. При этом, несмотря на большие затраты, связанные с получением жидкого гелия, использование сверхпроводников оказывается значительно выгоднее, чем использование обычных электромагнитов. Уже существуют генераторы и электродвигатели со сверхпроводящими обмотками мощностью около 10 000 киловатт. В настоящее время рассматриваются проблемы передачи электроэнергии на большие расстояния по «сверхпроводящим» линиям передач.

Таким образом, теория советских физиков сыграла огромную роль в создании новой техники.

Б. Гнеденко

О математике Страны Советов

Дореволюционная Россия дала миру ряд выдающихся математиков, обогативших нашу науку первоклассными идеями и результатами. Достаточно вспомнить имена Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, Н. Е. Жуковского, чтобы понять, как много ценного внесла наша страна в развитие математики. И это было сделано в эпоху, когда редкостью были не только высшее и среднее, но даже начальное образование. Для прогресса же науки необходимы не только наличие потенциальных талантов, но и высокий уровень культуры больших масс населения, хорошо организованная школа, наличие развитой экономики и промышленности. Всего этого дореволюционная Россия была лишена. В обилии были лишь талантливые люди, как правило, не находившие себе места в жизни.

Великая Октябрьская революция вызвала огромный научный энтузиазм молодежи, стремление к таким же решительным переменам в науке, какие произошли в социальной жизни, веру в успех и необходимость научного поиска. Этому способствовало то, что наука и научные открытия перестали быть только личным делом ученого, приобрели общегосударственную значимость, необходимость для прогресса всей жизни народа и страны.

В первые же годы существования Советской власти, в годы разрухи, гражданской войны, интервенции, голода, эпидемий правительство оказывало действенную помощь существующим университетам, заботилось о создании новых университетов и специализированных научно-исследовательских институтов и лабораторий.

Так, в 1918 г. был издан декрет об организации ЦАГИ — Центрального аэрогидродинамического института и о назначении Н. Е. Жуковского его директором. В том же году была создана Нижегородская радиолаборатория. Оба эти учреждения оказали огромное влияние не только на развитие отечественного самолетостроения и радиотехники, но и на привлечение интересов советских математиков к новым прикладным проблемам большого общенаучного значения.

В 1921 г. — в разгар разрухи — по инициативе В. А. Стеклова был организован Физико-математический институт Академии наук. Впервые в истории нашей страны развитием теоретической и прикладной математики стало заниматься специальное научное учреждение. Уже одним этим подчеркивалось отношение нового государственного строя к науке и не только в прикладном, но и в теоретическом ее аспекте. В 1934 г. Физико-математический институт разделился на ряд самостоятельных научных учреждений, среди которых для нас особый интерес представляет Математический институт Академии наук СССР, носящий имя создателя — В. А. Стеклова. За более чем полувековой период своего существования Институт имени Стеклова внес большой вклад в развитие теоретической математики.

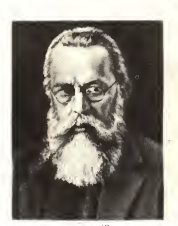
Позднее, по мере организации республиканских Академий наук, в каждой союзной республике начали работать специализированные математические институты. Создание широкой сети научно-исследовательских учреждений в нашей стране являлось новой формой организации

научных исследований. Талантливые исследователи, увлеченные стоящими перед ними научными проблемами, получили возможность полностью отдаться любимому делу.

Мне не хотелось бы только что сказанным создать у читателей ложные представления о том, что в наши дни полноценно науку можно развивать лишь в стенах академических институтов. В действительности крупные научные открытия удается делать и в заводских лабораториях, и на кафедрах вузов, и в научно-исследовательских институтах прикладного профиля. Все дело в человеке, его таланте, увлеченности, окружающей его атмосфере. Если для него интересы науки стоят на первом плане, а проблемы личной карьеры его не волнуют; если он является генератором новых идей и способен находить подходы к их решению; если он способен критически относиться к своим результатам и выслушивать предложения других; если в учреждениях имеются здоровое научное соперничество и взаимопомощь, то успех обеспечен.

В связи с математизацией науки и ускоренным научно-техническим прогрессом фундаментальные научные проблемы возникают в наши дни и в учреждениях прикладного профиля.

Важно не пренебрегать задачами практики, поскольку из них вырастают постановки математических задач большой важности. Чтобы за частными задачами практики усмотреть общие проблемы, необходимо вникать в существо этих задач и на их базе строить математические модели реальных явлений. Важно также за общими математическими построениями видеть возможности отражения реальных явлений окружающего нас мира — биологических, физических, экономических, инженерных, организационных. В наше время, когда математические методы пронизывают буквально все науки, когда многие тысячи математиков работают в научных учреждениях прикладного профиля, особенно важно, чтобы возможности математики были видны достаточно широко как самим математикам, так и представителям



В. А. Стеклов

других областей знания и деятельности.

Мы уже сказали, что Великая Октябрьская революция явилась мощным толчком к прогрессу математики в нашей стране, создала исключительно благоприятные условия для развития абстрактных ее направлений и применения математических методов в естествознании, инженерном деле, организации производства. Это обстоятельство вызвало огромный прилив способной молодежи в университеты, ее стремление испытать свои силы в научных исследованиях и внести свою лепту в прогресс математики. Поэтому за годы Советской власти были воспитаны многие сотни крупных исследователей-математиков, получивших в различных областях математической науки крупные результаты, проложивших в нашей науке собственные перспективные пути, создавших новые направления научных исследований.

Даже краткое описание того, что сделали советские математики за истекшие шестьдесят лет, потребовало бы многотомного сочинения и работы большой группы специалистов. Именно поэтому здесь мы вынуждены ограничиться лишь беглым обзором небольшой доли важных направлений научных исследований. При этом мы будем вынуждены упомянуть лишь небольшое число имен, хотя многие из тех, кто здесь не будет упомянут, заслуживают за свои научные открытия самых высоких похвал.

Пожалуй, самым крупным явлением в математической жизни нашей



И. Г. Петровский



Д. А. Граве



О. Ю. Шмидт

страны следует считать возникновение Московской математической школы теории функций и теории множеств. У ее истоков стояли два выдающихся математика и педагога — Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин. С их именами связано широкое привлечение студенческой молодежи к научным исследованиям.

Непосредственно перед Октябрьской революцией Н. Н. Лузин защитил свою докторскую диссертацию «Интеграл и тригонометрический ряд». Многочисленные результаты, красивые построения, постановка большого числа новых задач для дальнейших исследований, живое изложение — все это привлекло внимание математической молодежи к идеям Лузина. К тому же Лузин умел заинтересовывать своих слушателей, убеждать последователей в важности возникающих вопросов для науки, прививать веру в наличие творческих способностей. Эти качества еще в 1916—1917 гг. привлекли к нему первую группу учеников — Д. Е. Меньшова, П. С. Александрова и А. Я. Хинчина. Первые их самостоятельные работы были в кругу идей учителя — теория интеграла, сходимость тригонометрических рядов, строение так называемых борелевских множеств. Эти первые работы в значительной степени определили дальнейшие интересы названных исследователей. Д. Е. Меньшов основные свои работы посвятил теории тригонометрических рядов и рядов ортогональных функций; А. Я. Хинчин — метрической теории функций и ее применениям в теории чисел, теории вероятностей и статистической физике; П. С. Александров — теория множеств, а позднее — топологии.

Уже первые приемы студентов в Московский университет после 1917 года дали второе поколение активных учеников Лузина. Лузин организовал семинар, на котором каждому участнику предлагалось прореферировать определенную монографию; затем устраивалось обсуждение реферата с постановкой вопросов, с выявлением возможности упрощения и обобщения доказательств. Такие обсуждения прекрасно воспитывали начинающих математиков и приучали к самостоятельному мышлению.

В двадцатые годы ученики Лузина называли свой коллектив «*Лузитанией*». Этим подчеркивалось восхищение своим учителем, его научными идеями, лекциями. Ученики Лузина гордились своей причастностью к группе, разрабатывающей его идеи, и стремились дать максимум того, на что они способны в науке. Как вспоминает П. С. Александров, «своей идейной почвой этот научный энтузиазм имел великие патриотические идеи советской научной культуры, возбудившие в учащихся и ученых то подлинное научное горение, которое с такой силой никогда не проявлялось в стенах дореволюционного математического факультета Московского университета».

Конечно, каждое чрезмерное увлечение несет в себе и отрицательное начало. Лузитанцы были чрезмерно

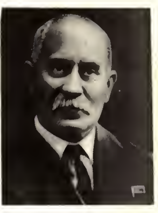




С. Н. Бернштейн



И. М. Виноградов



В. И. Романовский

увлечены лишь одним направлением математического развития и некоторые из них несколько свысока относились к классическим областям математики. Это нашло отражение в шуточных названиях ряда дисциплин: так, теория вероятностей называлась у них теорией неприятностей, уравнения в частных производных — уравнениями с несчастными производными, конечные разности — разными конечностями и т. д. Однако эта недооценка других областей математики продолжалась недолго, поскольку внутри самой Лузитании начался процесс расширения интересов. Так, П. С. Александров и П. С. Урысон увлеклись проблемами теоретико-множественной топологии и вскоре положили начало существованию Московской топологической школы, из которой вышли многочисленные первоклассные ученые и которая подарила миру большое число оригинальных идей, понятий и направлений исследований. А. Я. Хинчин в двадцатые годы начал интересоваться проблемами метрической теории чисел, от нее подошел к вопросам теории вероятностей и к концу двадцатых годов целиком направил свою энергию на эти два направления исследований. Теория вероятностей вскоре стала одной из существенных частей интересов Московской математической школы. Создание Московской школы теории вероятностей является заслугой двух выдающихся ученых — А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова. Далее интересы московских математиков обратились к классическому анализу. При этом выяснилось, что идеи теории функций дают возможность серьезного продвижения. Качественная теория дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных становятся объектом исследований москвичей. Среди представителей этого направления следует назвать В. В. Степанова и И. Г. Петровского.

Не следует думать, что только Москва была центром математической мысли того времени. Первоклассные исследования в это время проводились на Украине — в Киеве и Харькове. В Киеве следует отметить, в первую очередь, исследования по абстрактной алгебре, культивируемые Д. А. Граве и его учениками. В начале революции один из его учеников О. Ю. Шмидт — разносторонний ученый и превосходный лектор — начал пропаганду новых алгебраических идей в Москве. О. Ю. Шмидт явился создателем Московской алгебраической школы. В Харькове С. Н. Бернштейн развивал идеи П. Л. Чебышева в области наилучшего приближения функций полиномами и успешно работал в области теории вероятностей.

В Ленинграде успешно развивались исследования в области математической физики и теории чисел. Оба эти направления исследований были традиционными для ленинградцев и берут свое начало от Л. Эйлера, М. В. Остроградского и П. Л. Чебышева.



Грузинские математики (слева направо): А. М. Размадзе, А. К. Харадзе (стоит), Г. Н. Николадзе, Н. И. Мусхелишвили

По аналитической теории чисел замечательные результаты были получены И. М. Виноградовым. В 1924 г. он показал, что многие проблемы аналитической теории чисел допускают сведение к оценкам «тригонометрических сумм», т. е. сумм вида

$$\sum e^{2\pi i f(x)},$$

где f — некоторая функция, а x пробегает ту или иную последовательность целых чисел. В 1934 г. И. М. Виноградову удалось на этом пути почти полностью решить знаменитую задачу Гольдбаха: всякое нечетное натуральное число представимо в виде суммы не более трех простых чисел.

Новые университеты, образованные в ряде городов страны в первые годы революции, быстро превратились в значительные математические центры. В первую очередь мы должны назвать здесь Тбилиси и Ташкент, которые славились своими исследованиями по математической физике (Тбилиси), нелинейным дифференциальным уравнениям и математической статистике (Ташкент). Организаторами Грузинской математической школы были Н. И. Мусхелишвили, Г. Н. Николадзе, А. М. Размадзе и А. К. Харадзе *). Создателем Ташкентской математической школы был В. И. Романовский.

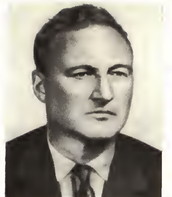
К началу Великой Отечественной войны советская математика завоевала огромный научный авторитет во всём мире. Своими исследованиями она охватила практически все направления математической мысли. Многие математики принимали участие в решении задач естествознания, техники и организации производства. Особенно значительными были результаты математиков в связи с проблемами, выдвигаемыми развитием авиации. Именно задачами полета в сжимаемой жидкости было вызвано построение теории квазиконформных отображений М. А. Лаврентьевым. Крупный успех накануне Великой Отечественной войны был достигнут в построении математической теории «шимми» и «штопора», явившихся причиной гибели многих самолетов. Как правило, попав в «штопор» или «шимми», самолет погибал вместе с находившимися в

*) См. «Квант», 1975, №9, с. 12

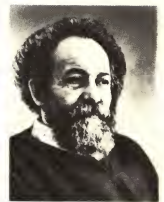




М. В. Келдыш



Ю. В. Линник



А. А. Ляпунов

нем людьми. Из математической теории, построенной М. В. Келдышем, удалось сделать практические выводы, которые позволили радикально бороться как с «шимми», так и со «штопором».

Великая Отечественная война не прошла мимо советских математиков: тысячи из них пошли на фронт, многие переключились на решение задач, необходимых для победы, остальные не переставали трудиться на своих постах, веря в победу и создавая для будущего новые научные ценности. На фронтах сражались такие крупные ученые, как Ю. В. Линник, А. А. Ляпунов, М. В. Бебутов. К сожалению, не все вернулись с полей войны, и советская математика потеряла многих талантливых ученых. Некоторые молодые математики, пройдя в рядах Армии все военные годы, навсегда связали с ней свою жизнь. Немало крупных военных специалистов, сделавших серьезный вклад в советскую военную науку, начинали перед войной свой путь как математики.

Уже первые дни войны показали, что советская наука может быть действенным орудием борьбы. Были созданы таблицы бомбометания с самолетов, обладавших малыми скоростями («кукурузников»). А. Н. Колмогоров создал теорию искусственного рассеивания для увеличения вероятности поражения цели. Эта теория нашла применение при минных атаках судов военного флота, а также при стрельбе зенитной артиллерии. М. А. Лаврентьев создал теорию действия кумулятивного заряда, идея которого была известна горнякам и использовалась при подрыве горных пород. Во время войны она была использована как нами, так и другими воюющими государствами. После войны эта теория широко используется в мирной практике при строительстве плотин, каналов, разного типа насыпей.

Огромной важности математические задачи возникли и в связи с обеспечением качества массовой промышленной продукции. Индивидуальная проверка качества каждого изготовленного изделия требовала огромного числа контролеров. На это идти было нельзя, поскольку и без того был катастрофический недостаток рабочей силы. К тому же в ряде случаев проверка каждого изделия недопустима, поскольку она приводит к непоправимой его порче. Например, чтобы проверить взрыватель, надо его взорвать. Именно в это время возникла идея построения теории статистического контроля качества продукции. В ее создании активное участие принял А. Н. Колмогоров. В настоящее время эта теория энергично развивается по двум путям: 1) проверка качества уже изготовленных партий (приемочный контроль) и 2) управление качеством изделий в процессе изготовления (текущий или оперативный контроль).

Я вспоминаю такой эпизод. На одном из крупных заводов, выпускавших приборы управления стрельбой с самолетов и бомбометанием,


С. Л. Соболев


И. М. Гельфанд


Л. В. Канторович

скопилось огромное количество нестандартной по размерам продукции. Дело в том, что на заводе работали преимущественно неквалифицированные мальчики и девочки, а квалифицированных рабочих не осталось — они были призваны в армию. Нужно было продумать возможность использования деталей, забракованных из-за размера. Решение удалось найти на следующем пути. Поскольку приборы можно было считать не подлежащими ремонту, было предложено разбить все детали на несколько групп по количественному признаку. Детали из соответствующих групп уже допускали сопряжение (сборку), и получившиеся приборы давали достаточную точность. В результате был получен огромный резерв для увеличения производства крайне необходимой для фронта продукции. Вдобавок на заводе удалось освободить большие площади для производственных целей.

Конечно, здесь указана лишь ничтожная доля того, что было сделано советскими математиками в помощь фронту и вошло весомой составной частью в завоевание победы.

В период Великой Отечественной войны не прекращались и теоретические исследования в области математики. В ту пору было выполнено много превосходных исследований в области алгебры, топологии, теории вероятностей, функционального анализа, теории функций и геометрии. Развитие теоретической математики было абсолютно необходимо для послевоенного развития как науки, так и всего народного хозяйства. Это создало прекрасную базу для послевоенного развития атомной физики, создания электронной вычислительной техники, первых побед в освоении космического пространства.

Послевоенные годы характерны стремительным процессом математизации знаний и практической деятельности. Математики потребовались для решения задач организации производства и для исследования биологических процессов, для продвижения в области физики и при создании технических систем, для изучения экономических вопросов и при рациональном размещении производственных предприятий. Но этого мало. Оказалось, что математические методы оказывают помощь археологу и историку, лингвисту и медику. Появились новые направления математической мысли. Математическая логика приобрела несравненно большее значение, чем до войны. В этом большую роль сыграли электронные вычислительные машины и вызванная ими потребность в тщательном логическом анализе процессов при программировании для ЭВМ, а также при составлении математических моделей явлений. В теории вероятностей появились новые ветви, тесно связанные с экономикой и организацией производства, а также с задачами физики.

Если прежде физика свободно обходилась привычным для математики общим понятием функции, то теоре-



Л. С. Понтрягин



Н. Н. Боголюбов



Н. М. Крылов

тическим построениям современной физики в этих рамках стало тесно. В конце сороковых годов физики все чаще и чаще стали допускать операции с объектами, которые не укладывались в классическое понятие функции. В самом начале пятидесятых годов появились работы С. Л. Соболева и французского математика Л. Шварца, в которых было положено начало широкому и продуктивному обобщению понятия функции — было введено понятие обобщенной функции и разработаны правила действий с этими функциями. Несколько позднее И. М. Гельфанд ввел в рассмотрение обобщенные случайные процессы, использовав для этой цели идеи обобщенных функций.

Это перечисление новых ветвей математики, в становлении и развитии которых деятельное участие приняли советские математики, можно продолжать и далее. Однако у нас нет возможностей коснуться всех их даже вкратце. Именно поэтому мы вынуждены остановиться лишь на нескольких направлениях мысли, которые по тем или иным причинам представляют особый интерес.

Прежде всего следует упомянуть большое направление исследований, связанное с отысканием экстремальных решений. Важность этого рода исследований выявилась в полной мере только в последнее время: при нынешних масштабах народного хозяйства неудачное использование материальных ресурсов приводит к огромному перерасходу, неудачный выбор направления движения замедляет доставку пассажиров и грузов; неудачное распределение работы между оборудованием влечет неполное использование станков и аппаратуры. Первые задачи такого рода появились давно и были известны еще в Древней Греции.

Непосредственно перед Великой Отечественной войной Л. В. Канторович рассмотрел ряд новых задач на разыскание максимального и минимального значений, связанных с распределением работ, раскроем материалов, организацией перевозок и т. п. Эти задачи послужили началом создания новой математической теории — *линейного программирования*, получившей после войны быстрое развитие. Теперь эти первичные постановки задач получили общие формулировки, для них предложены методы решения, построена интересная теория, эти результаты распространены на более общие случаи (*нелинейное программирование*).

Большое направление исследований, вызванное необходимостью поручать автоматам управление технологическими процессами, движением самолетов, космических аппаратов и т. д., было разработано Л. С. Понтрягиным и его учениками. Это направление получило наименование *теории оптимального управления*. Теория и выдвинутые в ней принципы немедленно получили многочисленные практические применения. Другой подход к решению тех же задач связан



А. Н. Тихонов

с именем крупного американского математика Р. Беллмана. Он получил название *динамического программирования*.

К новым задачам в теории случайных процессов привели такие задачи практики, как управление качеством продукции и определение момента наладки оборудования. На эти задачи обратил внимание А. Н. Колмогоров, направивший на них внимание ряда своих учеников.

Один из крупнейших математиков современности Н. Н. Боголюбов, начав работать под руководством академика Н. М. Крылова, свой первый результат опубликовал в семнадцатилетнем возрасте. Его научные интересы быстро расширялись, охватив математический анализ, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теорию функций, математическую физику, теорию вероятностей. Совместно с Н. М. Крыловым им были разработаны математические методы нелинейной механики. После Великой Отечественной войны Н. Н. Боголюбов перешел почти исключительно на решение задач современной физики и в этой области добился крупных успехов.

Нельзя не упомянуть о математике исключительно широкого профиля, результаты которого относятся к топологии, теории дифференциальных уравнений, математической физике, геофизике, вычислительной математике, электродинамике — А. Н. Тихонове. В первую половину нашего столетия под влиянием взглядов замечательного французского математика Адамара сложилось убеждение, что для физики и практики интересны только так называемые *корректные задачи*, решения которых, полученные при близких начальных данных, не могут расходиться между собой слишком сильно. Постоянный интерес к задачам практики убедил А. Н. Тихонова в ошибочности этой точки зрения. Оказалось, что много естественных задач физики, экономики и других областей знания по своему существу являются некорректно поставленными. Тихоновым был разработан подход к решению такого типа задач.

В краткой статье нет возможности, да и необходимости, упомянуть имена всех, даже наиболее крупных математиков, сыгравших серьезную роль в развитии советской математики. Именно поэтому в настоящей статье дан только общий взгляд на прогресс математики в нашей стране за истекшие шестьдесят лет. Если у читателя создалось убеждение в том, что за этот короткий исторический срок в Советском Союзе произошли поистине революционные сдвиги в развитии математической науки, воспитаны многочисленные кадры активно работающих математиков, возникли многие новые направления математической мысли, то цель, которая была поставлена мною, достигнута.

Прогресс страны требует непрерывного развития науки как в теоретическом, так и прикладном плане. Важно подготовить себя психологически к тому, что основным источником математических теорий является практика и что задача математики состоит не только в доказательстве новых теорем, но и в изучении явлений окружающего нас мира. Как правило, случается так, что явления природы и процессы экономики шире уже имеющихся средств математики. Это является вечным стимулом для развития самой математики, ее понятий и теорий.

Достижения советских физиков

Краткая хроника выдающихся открытий советских физиков включает, в основном, «именные» открытия. Конечно, не каждое крупное открытие непременно приобретает впоследствии имена сделавших его ученых. Поэтому приведенный здесь список не охватывает даже самых крупных открытий, сделанных нашими учеными в области физики. Подробный рассказ о достижениях советских физиков, изданный к 50-летию Октября, с трудом уместился в двух обширных томах. Но мы надеемся, что даже краткий перечень «именных» открытий поможет нашим читателям почувствовать, как велик вклад советских ученых в сокровищницу мировой науки. Хроника подготовлена В. А. Лешковцевым.

Известно, что прочность твердого тела, определяемая на опыте, во много раз меньше ее значения, вычисленного теоретически. Причину этой разницы первым раскрыл академик Абрам Федорович Иоффе. Оказалось, что в преждевременном разрушении материалов повинны различные дефекты кристаллической структуры, например, микроскопические трещины на поверхности кристаллов. Погрузив кристалл каменной соли в воду и растворив поверхностный слой, Иоффе достиг увеличения прочности в сотни раз. Упрочнение кристаллов при растворении поверхностного слоя получило название **«эффекта Иоффе»**.

●

В 1919—1920 годах академик Леонид Исаакович Мандельштам теоретически показал, что микроскопические неоднородности плотности вещества, возникающие в результате тепловых колебаний молекул, изменяют спектр рассеянного света, добавляя в него новые спектральные линии, которые очень трудно наблюдать. (Эти линии впервые были обнаружены членом-корреспондентом АН СССР Евгением Федоровичем Гроссом.) Явление, в результате которого они возникают, было названо **«эффектом Мандельштама — Бриллюэна»**, так как несколько позднее аналогичное предсказание было сделано французским физиком Бриллюэном.

●

В 1922 году профессор Александр Александрович Фридман получил два новых решения основного уравнения общей теории относительности для всей Вселенной. Оба они описывали не стационарную Вселенную, как у Эйнштейна, а Вселенную, которая непрерывно развивается. В дальнейшем **«модель расширяющейся Вселенной Фридмана»** получила экспериментальное подтверждение и теперь является общепризнанной.

●

Академик Владимир Александрович Фок с момента возникновения квантовой механики работал над ее развитием. Уже в 1926 году он обобщил основное уравнение этой теории на случай наличия магнитного поля и получил релятивистское уравнение квантовой механики, известное физикам как **«уравнение Фока — Клейна»**. В дальнейшем академик В. А. Фок одновременно с английским физиком Хартри создал метод расчета спектров атомов, содержащих большое количество электронов, и даже спектров сложных молекул. Этот метод вошел в историю физики под именем **«метода Фока—Хартри»**. До создания этого метода расчет сложных атомов был совершенно недоступной задачей для квантовой механики.

●

В 1926 году академики Леонид Исаакович Мандельштам и Григорий

Самуилович Ландсберг, исследуя рассеяние света в кристаллах кварца, обнаружили в спектре рассеянного света дополнительные спектральные линии, не принадлежащие падающему на кристалл свету. Эти спектральные линии возникают в результате взаимодействия падающего света с отдельными молекулами, образующими кристаллическую решетку. Несколько позднее аналогичное явление было обнаружено индийским физиком Раманом при изучении рассеяния света в жидком бензоле. Оно получило название **«эффекта Мандельштама — Ландсберга — Рамана»** или «комбинационного рассеяния света». Комбинационное рассеяние стало мощным средством изучения строения молекул.

●

В 1928—1929 годах академик Петр Леонидович Капица с помощью сконструированной им оригинальной установки для создания сверхсильных магнитных полей установил, что в таких полях изменение электрического сопротивления металлов растет не пропорционально квадрату магнитной индукции, как ожидалось на основе существовавших тогда теорий, а является линейной функцией магнитной индукции. Это неожиданное явление, которое не удавалось объяснить около 30 лет, называют **«законом Капицы»**.

●

В начале 30-х годов профессор Лев Васильевич Шубников, работая в лаборатории голландского физика Де-Гааза, обнаружил, что электрическое сопротивление висмута, помещенного в магнитное поле, по мере увеличения магнитной индукции поля то возрастает, то убывает (как говорят, сопротивление висмута осциллирует). Этот **«эффект Шубникова — Де-Гааза»** широко используется для исследования энергетического спектра электронов в металле.

●

В 1930 году академик Лев Давидович Ландау теоретически показал, что свободные электроны в металле под действием внешнего магнитного поля могут двигаться только по строго определенным (как говорят физики — квантовым) траекториям. Это означает, что в магнитном поле возникают особые энергетические уровни, получившие наименование **«уровней Ландау»**.

Из этой же теории следовало, что действие магнитного поля на свободные электроны в металле приводит к возникновению дополнительного магнитного момента, направленного в сторону, противоположную внешнему магнитному полю. Такой момент называется диамагнитным, а описанное явление называют **«диамагнетизмом Ландау»**. Заметим, что эта же теория объяснила и эффект Шубникова — Де-Гааза.

В 1962 году за выдающиеся заслуги в области теоретической физики Л. Д. Ландау была присуждена Нобелевская премия.

●

Член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель первым ввел в 1931 году в обиход физиков особую квазичастицу, которую теперь называют **«экситоном Френкеля»**. Он обратил внимание на то, что в кристаллической решетке может существовать особое возбужденное состояние электронов. Возникнув в какой-либо ячейке кристалла, это возбуждение перемещается по кристаллу, подобно своеобразной частице. Существование экситонов было впервые доказано в экспериментах члена-корреспондента АН СССР Евгения Федоровича Гросса. Экситоны играют большую роль в физике твердого тела и в современной химии.

●

В 1933 году академик Игорь Евгеньевич Тамм теоретически предсказал существование на поверхности полупроводниковых кристаллов своеобразных энергетических состояний («ловушек»). Они вошли в науку под названием **«поверхностных уровней Тамма»**.

В 1934 году академик Исаак Константинович Кикоин открыл фотоэлектромагнитный эффект, показав в экспериментах, что при освещении полупроводника, находящегося в магнитном поле, в нем возникает электродвижущая сила. Кванты света создают носителей тока — свободные электроны и дырки, которые диффундируют вдоль направления падения света, а магнитное поле разводит их в противоположных направлениях. Это явление давно уже называют **«эффектом Кикоина»**.

●

Академик Павел Алексеевич Черенков вместе со своим учителем академиком Сергеем Ивановичем Вавиловым обнаружили в 1934 году эффект «сверхсветового электрона». Оказалось, что в жидких и твердых средах электроны могут двигаться со скоростью большей, чем скорость света в этих средах (но, конечно, не большей скорости света в пустоте!). Электроны могут обгонять испускаемый ими свет. Этот эффект, получивший название **«эффекта Черенкова»**, нашел ряд ценных практических применений, в частности, для регистрации быстрых заряженных частиц (так называемые черенковские счетчики частиц). Теория, объяснившая эффект Черенкова, была создана академиками Игорем Евгеньевичем Таммом и Ильей Михайловичем Франком. За открытие и объяснение этого явления П. А. Черенкову, И. Е. Тамму и И. М. Франку в 1958 году была присуждена Нобелевская премия.

●

В 1936 году член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель разработал электрокапиллярную теорию атомных ядер, в которой ядра рассматриваются как капли заряженной жидкости. Вслед за Френкелем эти же идеи развил датский физик Нильс Бор. В историю физики они вошли под названием **«капельной модели ядра Бора — Френкеля»**.

●

С именем академика Петра Леонидовича Капицы связано еще одно явление, открытое им в 1938 году. Изучая свойства жидкого гелия, он обнаружил, что при температуре ниже 2,19 К гелий течет сквозь узкую щель практически без всякой вязкости. В дальнейшем это явление было названо сверхтекучестью. Теорию этого явления создал в 1941 году академик Лев Давидович Ландау.

●

Профессор Московского университета Анатолий Александрович Власов в 1938 году первым вывел уравнение, описывающее поведение разреженной плазмы, в которой не происходит столкновений заряженных частиц. Оно вошло в науку под именем **«уравнения Власова»**.

●

В 1944 году академик Евгений Константинович Завойский открыл электронный парамагнитный резонанс, положив начало новой области физики твердого тела. Суть этого явления заключается в том, что вещества, находящиеся в постоянном магнитном поле, избирательно поглощают энергию перпендикулярного к нему высокочастотного магнитного поля.

●

В 1944 году академик Владимир Иосифович Векслер открыл носящий его имя принцип автофазировки частиц, ускоряемых в циклических ускорителях. На нем основана работа всех современных циклических ускорителей. Несколько позже, независимо от Векслера, этот же принцип открыл американский физик Макмиллан. За это открытие оба они были удостоены международной научной премии.

●

В 1947 году академик Лев Давидович Ландау показал, что даже при отсутствии столкновений частиц плазмы распространяющиеся в ней электромагнитные волны испытывают затухание. Это явление играет существенную роль в поведении плазмы. Физики всего мира называют его **«затуханием по Ландау»**.

Некоторые металлы и сплавы при охлаждении до очень низких температур полностью утрачивают сопротивление протекающему по ним току. Это явление названо сверхпроводимостью. В 1950 году академики Виталий Лазаревич Гинзбург и Лев Давидович Ландау построили теорию сверхпроводимости, учитывающую квантовые эффекты в сверхпроводниках. Пользуясь этой теорией, члены-корреспонденты АН СССР Алексей Алексеевич Абрикосов и Лев Петрович Горьков создали теорию сверхпроводящих сплавов, имеющую очень большое значение. Эта теория известна во всем мире как **«теория ГЛАГ»** (Гинзбург — Ландау — Абрикосов, — Горьков).

Микроскопическая теория сверхпроводимости, объяснившая механизм этого загадочного явления, была создана в 1957 году академиком Николаем Николаевичем Боголюбовым и американскими физиками Бардином, Купером и Шриффером. Она так и называется **«теорией сверхпроводимости Боголюбова — Бардина — Купера — Шриффера»**.

●

В начале 50-х годов академики Александр Михайлович Прохоров и Николай Геннадиевич Басов разработали основы новой области физики — квантовой электроники и создали первый квантовый молекулярный генератор на молекулах аммиака. За эти выдающиеся работы в 1964 году им, совместно с американским физиком Таунсом, была присуждена Нобелевская премия.

●

Сложные молекулы органических веществ имеют спектры, состоящие из широких сплошных спектральных полос. В 1952 году профессор Эдуард Владимирович Шпольский показал, что, растворяя органические вещества в специально подобранных растворителях и охлаждая полученные растворы до очень низких температур, можно получить спектры поглощения, состоящие из очень тонких спектральных линий, однозначно связанных со строением и свойствами молекул. Так была создана новая область молекулярной оптики. Это явление в научной литературе повсеместно называют **«эффектом Шпольского»**.

●

Полупроводники, так же как и другие вещества, могут поглощать свет, длины волн которого заключены в определенных пределах. Для света с бóльшими длинами волн они прозрачны. Таким образом, существует граница для длин волн, при которой полупроводник перестает поглощать свет. В 1958 году академик Леонид Вениаминович Келдыш теоретически предсказал, что под действием внешнего электрического поля эта граница должна смещаться в сторону бóльших длин волн. Аналогичное предсказание сделал немецкий физик Франц. В 1960 году профессор Виктор Сергеевич Вавилов получил экспериментальное подтверждение этого явления, известного теперь как **«эффект Келдыша — Франца»**.

●

В 1966 году в СССР вступил в строй самый мощный для того времени ускоритель заряженных частиц — синхрофазотрон, ускоряющий протоны до энергии в 70 миллиардов электрон-вольт. Он был построен вблизи города Серпухова. С помощью этого усилителя было показано, что вероятность столкновения заряженных частиц при энергии, большей 20 миллиардов электрон-вольт, не уменьшается и не остается постоянной с ростом энергии, как предсказывала теория, а продолжает расти. Это неожиданное явление было названо **«Серпуховским эффектом»**.

●

Ученые всего мира, исследующие физические процессы в горячей плазме, широко используют установки, названные необычным русским словом **«ТОКАМАК»**. Так сокращенно называют «тороидальные камеры в магнитном поле» — советские термоядерные установки, разработанные и построенные в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова под руководством академиков Льва Андреевича Арцимовича и Бориса Борисовича Кадомцева.

С. Демидов

Проблемы Гильберта и советская математика

Событием номер один на Международном математическом конгрессе, проходившем в августе 1970 года во всемирно известном французском курортном городе Ницце, было известие о решении десятой проблемы Гильберта. Героем дня стал двадцатилетний советский математик Ю. В. Матиясевич, доклад которого был включен в повестку дня конгресса сверх заранее составленной программы. Так закончилась длившаяся 70 лет история этой проблемы Гильберта.

Решение каждой из двадцати трех проблем Гильберта, даже каждый частичный успех в их решении принимаются всем математическим миром как крупное математическое достижение. В чем секрет такой популярности гильбертовских проблем, той значимости, которое придается их решению? Ведь число нерешенных задач, поставленных в математической литературе, огромно, и лишь некоторые из них (как, например, проблема Ферма) приобретают широкую известность. А здесь не одна, а целых двадцать три задачи, некоторые из которых — не просто задачи в узком смысле этого слова, а планы разработки целых математических направлений! Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется отступить в 1900 год и оказаться в Париже на заседании второго Международного конгресса математиков, на котором 8 августа выступил Д. Гильберт с докладом «Математические проблемы».



Д. Гильберт (1862—1943)

Давид Гильберт родился в 1862 году в Кенигсберге. В этом городе он закончил школу и университет, здесь он начал свой путь в науке, на котором с первых же шагов ему сопутствовал успех. Полученные им результаты получили широкую известность. В 1895 году знаменитый геометр Ф. Клейн приглашает его в Геттинген занять должность ординарного профессора местного университета, с которым оказалась связанной вся дальнейшая деятельность Гильберта. Ко времени своего выступления на конгрессе 1900 года Гильберт прославился замечательными результатами по теории инвариантов и теории алгебраических чисел. В 1899 году вышел в свет его труд «Основания геометрии», составивший эпоху в основаниях математики. В этих работах в полной мере проявились удивительная разносторонность и обобщающая сила его дарования, позволявшие ему легко ориентироваться в самых различных областях математики, необычайная сила его математической интуиции. За Гильбертом наряду с А. Пуанкаре утверждается слава крупнейшего математика своего времени. Понятен поэтому тот исключительный

интерес, с которым встретили участники конгресса его доклад со столь многообещающим названием — «Математические проблемы».

«Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу, за которой скрыто наше будущее, чтобы хоть одним взглядом проникнуть в предстоящие успехи нашего знания и тайны его развития в ближайшие столетия? Каковы будут те особенные цели, которые поставят себе ведущие математические умы ближайшего поколения? Какие новые методы и новые факты будут открыты в новом столетии на широком и богатом поле математической мысли? — такими словами Д. Гильберт начал свой доклад. Затем он продолжал. — История учит, что развитие науки протекает непрерывно. Мы знаем, что каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону как бесплодные, чтобы заменить их новыми. Чтобы представить себе возможный характер развития математики в ближайшем будущем, мы должны перебрать в нашем воображении вопросы, которые еще остаются открытыми, обозреть проблемы, которые ставит современная наука, и решения которых мы ждем от будущего. Такой обзор проблем кажется мне сегодня, на рубеже нового столетия, особенно своевременным». И Гильберт предлагает вниманию слушателей двадцать три проблемы из различных областей математики, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки».

Первые шесть проблем доклада Гильберта относятся к обоснованию различных математических дисциплин, следующие девять — к более специальным вопросам алгебры, алгебраической геометрии и теории чисел, остальные восемь — к теории функций, дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению.

Следует отметить, что некоторые из этих проблем были поставлены задолго до Гильберта. Так, первая в списке — *проблема континуума* — была поставлена Г. Кантором в 1878 году, вопросы, относящиеся к третьей проблеме, обсуждались еще К. Гауссом в его переписке с Герлингом. Что касается вопросов, составляющих содержание восьмой проблемы, то один из них — *гипотеза о нулях дзета-функции* — был поставлен Б. Риманом в 1859 году, другой, именуемый *гипотезой Гольдбаха*, — еще в 1742 году в письме последнего к Л. Эйлеру, наконец, 21-я проблема — задача, выдвинутая Б. Риманом в 1857 году. Остальные проблемы, автором которых был сам Гильберт, составляют лишь часть задач, поставленных им к тому времени. Эти обстоятельства подчеркивают особый характер выбора проблем, содержащихся в докладе,— здесь лишь те наиболее важные, по мнению Гильберта, задачи, которые стояли тогда перед математикой, размышления над которыми могли помочь «представить себе возможный характер развития математического знания в ближайшем будущем».

Дальнейший ход событий показал, что выбор проблем, сделанный Гильбертом, был в основном правильным: разработка идей, связанных с их содержанием, составила значительную часть математики XX века. В решении этих проблем принимали участие очень многие талантливые математики из различных стран мира, в том числе сам Гильберт и его многочисленные ученики. Замечательное место среди них принадлежит отечественным математикам. В то время Россия не была еще мощной математической державой, подобной Германии или Франции, хотя и обладала уже признанными математическими школами и дала миру ряд выдающихся математиков, среди них — величайших математических гениев — Н. И. Лобачевского, П. Л. Чебышева. Однако золотой век отечественной математики был еще впереди. На конгрессе в Париже русская делегация была сравнительно небольшой— 9 человек (сравните: Франция — 90, Германия — 25) и выступила всего с одним сообщением «Об исчезновении (мы бы сказали — *о нулях* — С. Д.) функции *H* нескольких переменных», которое сделал харьковский профессор М. А. Тихомандрицкий.

В дальнейшем мы в основном будем придерживаться хронологического принципа.

Первой работой в России, посвященной разработке гильбертовых проблем, было исследование В. Ф. Кагана 1903 года, который значительно сократил и упростил появившееся незадолго до этого доказательство М. Дена, дававшее положительное решение третьей проблемы Гильберта, относящейся к стереометрии. В 1904 году С. Н. Бернштейн, молодой ученый из России, впоследствии академик, прославившийся выдающимися результатами в теории дифференциальных уравнений, теории функций и теории вероятностей, дал решение девятнадцатой проблемы Гильберта — трудной задачи теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это решение составило содержание докторской диссертации Бернштейна, защищенной им в том же году в Париже. Им же в работах 1908—1909 годов были получены важные результаты, связанные с двадцатой проблемой, также относящейся к теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В дальнейшем развитие направлений, связанных с разработкой этих проблем, стало одним из основных для получившей всемирную известность советской школы теории дифференциальных уравнений, истоки которой мы находим в творчестве В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова. Блестящие результаты по девятнадцатой проблеме были получены в 1937 году И. Г. Петровским, впоследствии академиком, одним из крупнейших специалистов в области теории дифференциальных уравнений.

И. Г. Петровский занимался также шестнадцатой проблемой Гильберта, включавшей в себя ряд задач топологии алгебраических кривых и поверхностей. В 1933 году он решил одну из этих задач, а в работе 1949 года (совместно с О. А. Олейник) обобщил свой результат.

В 1960 году ленинградскими математиками О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой было получено «смыкание» результатов по девятнадцатой и двадцатой проблемам Гильберта. Исследования по ним оказались в тесной связи с вариационным исчислением, призыв к развитию которого составляет содержание последней, двадцать третьей проблемы Гильберта. Ответом на этот призыв служат успехи вариационного исчисления в XX веке. Большую роль здесь сыграли исследования советских авторов (С. Н. Бернштейна, Л. А. Люстерника, Л. Г. Шнирельмана, Л. С. Понтрягина, О. А. Ладыженской и др.).

Шестая проблема Гильберта озаглавлена так: «Математическое изложение аксиом физики» (при этом имелась в виду также теория вероятностей). Любопытно отметить, что для Гильберта, как и для многих математиков его времени, теория вероятностей представлялась разделом физики (подобным механике), в котором математические методы играют выдающуюся роль. Такая точка зрения в значительной мере объяснялась слабой разработкой аксиоматического фундамента теории вероятностей, что влекло за собой подчас слабую выявленность собственно математического ее содержания. Аксиоматическое построение теории вероятностей поэтому было справедливо сформулировано Гильбертом в виде одной из основных задач, стоящих перед математикой.

Такую аксиоматизацию дал впервые С. Н. Бернштейн в работе, появившейся в год Великой Октябрьской социалистической революции. В 1936 году выдающийся математик современности А. Н. Колмогоров, ныне академик, предложил другую аксиоматическую систему теории вероятностей, основанную на понятиях теории меры. Эта система, ставшая впоследствии общепринятой, знаменовала собой начало нового этапа в истории теории вероятностей и появилась как бы в фокусе идей, с одной стороны, московской школы теории функций действительного переменного, основанной Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным, с другой — знаменитой петербургской школы П. Л. Чебышева, являвшейся ведущей в области теории вероятностей

в XX веке. Эти две школы послужили основанием, на котором выросла советская математическая школа.

Наряду с теорией вероятностей излюбленным направлением деятельности петербургской математической школы П. Л. Чебышева были теоретико-числовые исследования. Поэтому неудивительно, что особенно существен вклад советских ученых в разработку теоретико-числовых проблем Гильберта. В 1929 году молодой московский математик, впоследствии член-корреспондент АН СССР А. О. Гельфонд дал частичное решение седьмой проблемы Гильберта: *доказать, что числа вида* α^{β} *при алгебраическом* $\alpha\neq 0$, 1 *и алгебраическом иррациональном* β *всегда трансцендентны (или по крайней мере иррациональны).*

Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

где a_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ — целые рациональные числа. Примерами алгебраических чисел могут служить рациональные числа p/q, так как они являются корнями уравнения $qx-p=0$, числа вида $\sqrt[n]{p/q}$, так как они удовлетворяют уравнению $qx^n-p=0$, число $\sqrt{-1}$, так как оно представляет собой корень уравнения $x^2+1=0$. Число, не являющееся алгебраическим, называется *трансцендентным*.

Доказательство существования трансцендентных чисел дал в 1851 году Ж. Лиувилль. Тем не менее ни одного примера таких чисел не имелось до тех пор, пока в 1873 году Ш. Эрмит не доказал трансцендентности числа e (основания натуральных логарифмов). Вскоре вслед за этим немецкий математик Ф. Линдеман тем же методом доказал трансцендентность числа π, решив тем самым знаменитую проблему квадратуры круга. Таким образом, число примеров трансцендентных чисел было невелико, в то время как из доказательства существования трансцендентных чисел, данного в 1874 году Г. Кантором, следовало, что именно трансцендентные числа составляют подавляющую часть множества всех действительных чисел.

Седьмая проблема Гильберта предлагала математикам путь введения большого класса трансцендентных чисел. Технически эта проблема оказалась чрезвычайно трудной. В 1929 году А. О. Гельфонд доказал, что число $\alpha^{i\sqrt{p}}$ при алгебраическом $\alpha\neq 0$, 1 и целом $p\geqslant 1$ будет числом трансцендентным. В 1930 году Р. О. Кузьмин использовал метод А. О. Гельфонда для доказательства трансцендентности числа $\alpha^{\sqrt{p}}$ при тех же предположениях относительно α и p и иррациональном $\sqrt{p}$. Наконец, в 1934 году А. О. Гельфонд дал окончательное решение проблемы, подтвердив гипотезу Гильберта. Результат А. О. Гельфонда стал классическим результатом теории трансцендентных чисел.

Восьмая проблема Гильберта состоит из нескольких задач, относящихся к теории простых чисел,— раздела математики, не балующего нас результатами. Каждый полученный здесь новый факт — событие чрезвычайной значимости. Одна из этих задач — так называемая *проблема Гольдбаха* (названная так по имени петербургского академика Х. Гольдбаха, сформулировавшего ее в письме к Эйлеру от 7 июня 1742 года): *доказать, что всякое целое число, большее или равное шести, является суммой трех простых.*

Легко найти требуемые разложения для небольших чисел:

$$6=2+2+2,\ 7=3+2+2,\ 8=3+3+2,$$
$$9=3+3+3,\ 15=3+5+7.$$

Многие математики проверяли истинность гипотезы для бо́льших чисел, однако какие-либо конкретные сдвиги долгое время получить не удавалось, что дало повод известному немецкому специалисту по теории чисел Э. Ландау для пессимистических высказываний о проблеме Гольдбаха на Международном конгрессе математиков 1912 года. К решению проблемы не удавалось найти никаких подходов.

Тем более сенсационным стал результат замечательного советского математика академика И. М. Виноградова, сумевшего в 1937 году решить проблему для нечетных чисел. Этот результат, а также метод его получения относят к числу наиболее выдающихся математических достижений XX века. Метод этот успешно применялся в дальнейшем для реше-

ния многих задач теории чисел. В 1946 году академик Ю. В. Линник дал другое доказательство теоремы И. М. Виноградова с привлечением методов теории функций комплексного переменного.

Важным достижением советских ученых в решении теоретико-числовых проблем Гильберта стало также доказательство в 1948 году общего закона взаимности молодым московским математиком, впоследствии членом-корреспондентом АН СССР И. Р. Шафаревичем.

Этой работой завершилась длинная цепь исследований, отмеченная именами К. Гаусса, Г. Эйзенштейна, Э. Куммера, самого Д. Гильберта, Э. Артина, Г. Хассе.

Одной из проблем, долгое время не поддававшейся решению, была пятая, относящаяся к так называемой *теории непрерывных групп*. Ее окончательное решение было достигнуто лишь в 1952 году американцами Д. Монтгомери и Л. Циппином, но оно потребовало усилий многих выдающихся ученых и среди них известных советских математиков академиков Л. С. Понтрягина и А. И. Мальцева, доказавших проблему соответственно в 1934 и в 1946 годах для очень важных случаев.

Тринадцатая проблема относится к вопросу о представлении функции от нескольких переменных посредством суперпозиции функций от меньшего числа переменных. Пусть имеются три функции двух переменных u, v, w. Рассмотрим функцию $w(u(x, y), v(y, z))$. Она зависит уже от трех переменных: x, y, z. Эта функция трех переменных называется *однократной суперпозицией, составленной из трех функций двух переменных*. Например, функцию $w = xy + y^2z + x^2$ от переменных x, y, z можно рассматривать как однократную суперпозицию, составленную из функций $v = xy + x^2$, $u = y^2z$ и $w = u + v$, каждая из которых является функцией двух переменных.

Возникает вопрос: *а не являются ли все функции трех переменных многократными суперпозициями функций меньшего числа переменных?* Легко показать, что если рассматриваются не только непрерывные, но и разрывные функции, то на вопрос следует ответить утвердительно — всякая функция трех переменных может быть представлена в виде суперпозиции функций вида $f(x, y, z) = \psi(\varphi(x, y), z)$. Но Гильберта при постановке им тринадцатой проблемы интересовал вопрос о представлении функции трех переменных посредством суперпозиции функций достаточно гладких, например, аналитических (мы не имеем возможности дать здесь точное определение аналитической функции, скажем только, что непрерывные функции являются более «гладкими», чем разрывные, а аналитические более гладкими, чем непрерывные, и даже чем бесконечно дифференцируемые функции).

Рассмотрим квадратное уравнение относительно переменной f с коэффициентами x, y, z:

$$xf^2 + yf + z = 0.$$

Функцию

$$f = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4xz}}{2x},$$

являющуюся функцией коэффициентов, очевидным образом можно представить в виде суперпозиции элементарных функций не более чем двух переменных. Аналогично обстоит дело с корнями уравнений третьей и четвертой степени. Корни уравнений пятой и шестой степени также можно выразить через коэффициенты при помощи суперпозиции аналитических функций (правда, более сложных) не более двух переменных.

Однако для уравнения седьмой степени

$$f^7 + a_1f^6 + \ldots + a_7 = 0,$$

которое с помощью так называемого «преобразования Чирнгаузена» сводится к виду

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0,$$

такое представление получить не удавалось.

Гильберт выдвинул гипотезу, составившую содержание тринадцатой проблемы, что *решение f (x, y, z) последнего уравнения нельзя представить как суперпозицию даже непрерывных функций только двух переменных*. Если бы эта гипотеза под-

твердилась, то оказывалась бы решенной более сложная и важная задача о возможности представления аналитической функции трех переменных посредством суперпозиции достаточно гладких функций только двух переменных (оно оказывалось бы невозможным).

Немецкий математик Л. Бибербах называл тринадцатую проблему «самой несчастливой» — в данном случае число 13 оправдывало свою дурную славу, решение проблемы ускользало от исследователей, уводя их на зыбкие пути, приводившие к неверным заключениям. Так, некоторое время полагали, что Бибербаху удалось подтвердить гипотезу Гильберта, однако его построение оказалось ошибочным. Был получен целый ряд результатов, самым сильным из которых был результат молодого советского математика А. Г. Витушкина, косвенно вроде бы подтверждавших гипотезу Д. Гильберта.

Тем более неожиданным оказался результат, полученный в 1954 году академиком А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом, тогда еще студентом механико-математического факультета Московского университета, впоследствии профессором и лауреатом Ленинской премии. Они опровергли гипотезу Гильберта, показав, что *всякая непрерывная функция трех переменных представляет собой сумму девяти функций, каждая из которых является однократной суперпозицией функций двух переменных.*

Вторая проблема Гильберта состояла в доказательстве непротиворечивости арифметики. При этом Гильберт сильно ограничивал средства доказательства рамками подхода, получившего впоследствии название «финитизма Гильберта». Сам Гильберт совместно с учениками затратил много сил на решение этой проблемы и даже одно время испытывал уверенность, что такое доказательство им получено. Однако результаты К. Геделя 1931 года положили конец этой уверенности — выяснилось, что такое доказательство в рамках «финитизма Гильберта» принципиально не может быть получено. Начались поиски такого доказательства при отказе от некоторых ограничений, накладываемых «финитизмом Гильберта». Одно из самых замечательных доказательств такого рода получил в 1943 году академик П. С. Новиков.

Суть десятой проблемы, окончательно решенной Ю. В. Матиясевичем, состоит в следующем: *дано произвольное диофантово уравнение с целыми рациональными коэффициентами; указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное уравнение в целых рациональных числах.*

К примеру, целочисленными решениями уравнения

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

возникающего в связи со знаменитой теоремой Пифагора, являются наборы ($\alpha \in \mathbf{Z}$)

$$x = \alpha^2 - 1,\ y = 2\alpha,\ z = \alpha^2 + 1.$$

Эти формулы приписываются Пифагору, однако они не охватывают всех целочисленных решений (пифагоровых троек) данного уравнения. Общее решение

$$x = \xi^2 - \eta^2,\quad y = 2\xi\eta,\ z = \xi^2 + \eta^2$$

($\xi, \eta \in \mathbf{Z}$) мы находим у Диофанта, хотя оно, без сомнения, было известно задолго до него. В работах Диофанта теория таких уравнений получила значительное развитие, поэтому впоследствии они были названы его именем.

Исследованием диофантовых уравнений, или диофантовым анализом, как нередко говорят сегодня, занимались П. Ферма, Л. Эйлер, Ж. Лагранж и К. Ф. Гаусс. Последние двое полностью решили вопрос об отыскании целочисленных решений уравнения второй степени с двумя неизвестными. Можно назвать еще целый ряд выдающихся математиков XIX столетия, пробовавших свои силы в диофантовом анализе, однако к 1900 году, времени постановки Гильбертом указанной задачи, успехи в решении уравнений высших степеней были довольно скромными. Ставя указанную выше проблему, Гильберт намеревался, по-видимому, привлечь внимание математиков к разработке проблем диофантового анализа.

В 1908 году А. Туэ получил один из самых замечательных результатов

диофантового анализа: *уравнение $P(x, y) = c$, где c — целое число, а $P(x, y)$ — неприводимый многочлен, у которого все слагаемые имеют одинаковую степень, не меньшую трех, может иметь лишь конечное число целочисленных решений* (многочлен называется *неприводимым*, если он не разлагается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами).

Но ни метод Туэ, ни последующие методы не давали алгоритма для нахождения самих решений. Результаты, полученные для диофантовых уравнений степени выше двух (работы советского математика Б. Н. Делоне, немецкого математика К. Зигеля и др.), относились к поискам алгоритмов для отдельных классов диофантовых уравнений. И хотя успехи в поисках общего метода для произвольных диофантовых уравнений были в высшей степени незначительными, математики тем не менее полагали, что рано или поздно он будет найден.

Однако в середине тридцатых годов в математике сформировывается четкое понятие *алгоритма* и рождается представление о проблемах, для которых не существует алгоритма, задающего их решения, — об *алгоритмически неразрешимых проблемах*. Примеры таких проблем дали в 30—40-е годы А. Черч, А. Тьюринг, Э. Пост, А. А. Марков. В 1952 году П. С. Новиков доказывает алгоритмическую неразрешимость одной важной проблемы теории групп — проблемы тождества слов. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем, с одной стороны, и трудности, связанные с попытками нахождения искомого алгоритма, с другой, породили сомнение: а может быть, *алгоритма, решающего десятую проблему, не существует вовсе?* Результаты американских математиков (М. Дэвиса и др.), полученные в 50—60-е годы, давали косвенное подтверждение такому предположению. Им удалось показать, что для некоторого более общего класса уравнений, так называемых «показательно-диофантовых уравнений с целыми коэффициентами» такого алгоритма не существует. Но это для показательно-диофантовых уравнений, а для более специального случая — диофантовых уравнений — такой алгоритм мог и существовать. Так вот, Ю. В. Матиясевичем и было показано, что и для класса таких уравнений искомого алгоритма нет.

* * *

Мы рассказали здесь лишь о наиболее ярких достижениях советских математиков в решении проблем Гильберта. Более полный и подробный рассказ — тема не статьи, а книги. Такая книга, рассказывающая о достижениях ученых всего мира в решении проблем Гильберта, написанная крупными специалистами по соответствующим областям математики, вышла в нашей стране в 1969 году. Правда, говоря об этой книге, следует иметь в виду, что, во-первых, для чтения книги требуется значительная математическая подготовка — для понимания отдельных ее разделов не хватит даже знания университетского курса, а, во-вторых, за время, протекшее с момента ее опубликования, положение дел с изучением гильбертовых проблем сильно изменилось. Математика находится сейчас в стадии бурного развития, она постоянно ставит перед учеными новые и новые проблемы. Да и многие старые (в том числе некоторые из проблем Гильберта) до сих пор не нашли своего решения. Можно быть уверенным, что советские математики и в дальнейшем будут радовать нас замечательными успехами в решении наиболее трудных и важных задач современной математики.

Литература

1. Проблемы Гильберта. Сборник под редакцией П. С. Александрова. М., «Наука», 1969.

2. И. Г. Башмакова. Диофант и диофантовы уравнения. М., «Наука», 1972.

3. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры. М., Гостехиздат, 1956.

4. Ф. Кымпан. История числа π. М., «Наука», 1971.

5. С. Г. Гиндикин. К. Ф. Гаусс. «Квант», 1977, № 8.

6. В. И. Арнольд. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. «Математическое просвещение», 1958, № 3, 41—61.

И. Тюлина

Планета Жени Рудневой

В этом юбилейном году одной из малых планет Солнечной системы — астероиду 1907, открытому 11 сентября 1972 г. сотрудницей Крымской обсерватории Академии наук СССР Л. И. Черных, — присвоено наименование «Руднева» в честь студентки Московского государственного университета Евгении Рудневой. Что же сделала выдающегося студентка-астроном механико-математического факультета МГУ и почему ее имя присвоено планете?

И в школе, и в университете, и потом еще три жестоких года войны Женя страстно любила звездное небо, любила по-особому, как свое кровное, за что она несет ответственность. Вот запись в дневнике Жени-девятиклассницы:

«*Темно. С реки дует легонький ветерок, приятный-приятный. Звезды горят в небе. Я еще не отказалась от мечтаний, и мне кажется, что не откажусь. Зачем отнимать у себя счастливые минуты? Вот я смотрю на звездное небо, на Орион, на Сириус и мечтаю о том, как я буду изучать их спектры, я вижу себя в обсерватории... А на самом деле? Ведь сколько мне еще учиться! Но так я уже сейчас смотрю на небо, как на свою будущую собственность.*»

Способности у Жени были разносторонние. В школе все ей давалось легко. Она очень много читала сверх программы: по химии, по литературе, по истории, но больше всего по астрономии и математике. В МГУ она ездила на кружки и лекции. «*Когда я подумаю что я — я! — могу быть студенткой университета, мне что-то не верится, уж слишком большое уважение питаю к университету. Скорее всего меня туда и не примут.*» Она записывает в дневнике, что год назад было четыре отличника на одно место, а из года в год это число увеличивается.

Женя живо реагировала на все международные события и на успехи нашей страны: события в Испании, опубликование проекта Конституции, первые выборы в Верховный Совет СССР. После просмотра кинофильма «Ленин в Октябре» (я помню, как всех тогда волновал этот прекрасно поставленный фильм) Женя записывает в своем дневнике слова, которые оказались вещими:

«*Когда смотришь эту картину, не можешь быть равнодушной: смотришь на экран, а думаешь о себе. О, я очень хорошо знаю, для чего я живу, но сейчас я это поняла, почувствовала так, как никогда раньше... Я очень хорошо знаю: настанет час, я смогу умереть за дело моего народа так, как умирали они, безвестные герои из этого чудного фильма. Я хочу посвятить свою жизнь науке, и я это сделаю: все условия создала Советская власть для того, чтобы каждый мог осуществить свою мечту, какой бы смелой она ни была. Но я комсомолка, и общее дело мне дороже, чем свое личное (именно так я рассматриваю свою профессию), и если партия, рабочий класс этого потребуют, я надолго забуду астрономию, сделаюсь бойцом, санитаром, противохимиком. Побольше таких фильмов: они надолго заряжают...*»

На мехмат Женя поступила. Училась там она блестяще. Уже на втором курсе у нее появились печатные работы. Женя сделала несколько докладов в Отделе переменных звезд. Один из них был посвящен спектроскопически-двойным звездам. Помните, как она мечтала у реки, что будет изучать спектры звезд? Так все и получилось. Ее дарования заметили профессора и студенты. Известный астроном Павел Петрович Паре-



наго подарил ей свою книгу с дарственной надписью.

На фронт Женя с подругами пошли добровольцами. Чтобы попасть туда, им пришлось несколько раз ходить в ЦК ВЛКСМ. Штурманское дело, которое они изучали в ускоренном темпе в городе Энгельсе, давалось мехматовским комсомолкам легче, чем многим другим девушкам, отобранным Мариной Расковой для формирования летных частей. Задачки, теория, ориентирование по звездам не представляли для Жени труда. Но летная подготовка вызывала трудности: ее жестоко укачивало. Одна из подруг уехала домой — не выдержала. Жене грозило то же. Однако ее характер победил слабость организма — ее перестало укачивать.

Опытный еще с мирных дней летчик-аэроклубник Дина Никулина (ныне Герой Советского Союза) скажет потом о нашей Жене: «*С Женей Рудневой я много летала. Это была чистая, честная девушка. Большая умница, очень любознательная. Первое время я ей указывала на недостатки в полете. Ей нравилась моя требовательность, на мои выговоры она не обижалась. Была очень хорошим штурманом... Помню, как на станции Майская однажды очень удачно разбомбили мы эшелон. Долго не бомбили, выжидали. Сделали четыре захода и попали в эшелон. Летели обратно — пели*».

Женя стала штурманом звена, затем — эскадрильи. В 1943 г. она была уже штурманом 46-го гвардейского Таманского полка ночных бомбардировщиков. Женя организовала школу молодых штурманов, обучая их прямо в боевой обстановке. Новички охотно летали с Женей, чувствуя себя с ней уверенно.

Командование наградило Женю Рудневу тремя орденами: Красной Звезды, Красного Знамени, Отечественной войны I степени.

Весной 1944 г. женский авиационный полк участвовал в подготовке большого наступления наших войск под Керчью. Девушки летали бомбить укрепления гитлеровцев через Азовское море на Керченский полуостров, где у противника была очень сильная противовоздушная оборона. В ночь на 9 апреля девушки сделали много вылетов на цель, когда отбомбившийся экипаж Наташи Меклин увидел, как чей-то ПО-2 был пойман прожекторами в перекрест. Снаряды ложились все ближе и ближе к самолету. Вдруг эрликон выбросил горсть снарядов: облако взрывов окутало самолет. Он вырвался, маневрируя, весь объятый пламенем, и еще некоторое время упорно тянул на запад. Видимо, бомбы еще не были сброшены. И вот на земле показались разрывы. Вскоре самолет стал терять высоту, оттуда неслись ракеты, пылающие куски... Подавленные, возвращались на аэродром экипаж за экипажем; к ним бежали с тревогой: кто? Когда все приземлились, стало ясно — сгорел самолет молодой летчицы Прокофьевой, которую обучала в бою Женя. Это был 645-й боевой вылет Евгении Рудневой.

Посмертно ей было присвоено высокое звание Героя Советского Союза. Ее именем названа одна из улиц Москвы. А небо и впрямь стало собственностью Евгении Рудневой, как мечталось ей в детстве: ведь в этом прекрасном звездном мире она совершает свой вечный полет.

В. Левитина

Как Математик помог Бригадиру

Главная цель статьи — показать, что самые простые задачи, возникающие в практике, естественно приводят к фундаментальным понятиям математики.

1. Бригадир получает задачу

Наш Бригадир возглавляет бригаду из 10 человек, которая должна погрузить кирпич, находящийся на двух складах. На первом складе — 4 тысячи кирпичей, на втором — 8 тысяч. Склады устроены так, что на первом складе одновременно должны вести погрузку не менее шести рабочих, на втором могут работать от трех до шести человек. Бригадиру нужно распределить рабочих так, чтобы вся работа была выполнена за минимальное время.

Как может поступить Бригадир? Например, так: отправить сначала всех рабочих на первый склад, а после окончания его разгрузки шесть рабочих — максимально допустимое число — перевести на второй склад. *Предположим для простоты, что каждый рабочий за один час погружает тысячу кирпичей.* Т о г д а время, за которое бригада выполнит всю работу по этому расписанию, очевидно, равно $\frac{4}{10}+\frac{8}{6}=1\frac{11}{15}$ (часа).

Будет ли такая организация работы наилучшей? Если да, то почему? А если нет, то насколько она далека от оптимальной? Ответить на эти вопросы сам Бригадир не может. А вы? Попытайтесь — тогда вам будет значительно интереснее прочесть в следующих параграфах о встрече Бригадира с Математиком, к которому Бригадир обратился со своей задачей.

2. Математик создает модель задачи

Прежде чем взяться за решение задачи, Математик должен создать ее математическую модель.

Если обозначить через u и v количества грузчиков, работающих на первом и втором складах, то для каждого момента времени числа u и v удовлетворяют следующим условиям:

1) $u \in \mathbf{Z}$ и $v \in \mathbf{Z}$,
2) $6 \leqslant u \leqslant 10$ или $u=0$,
3) $3 \leqslant v \leqslant 6$ или $v=0$,
4) $u+v \leqslant 10$.

Этим условиям удовлетворяют такие тринадцать режимов работы: $\langle 6,4\rangle$ (на первом складе работает 6 человек, на втором — 4), $\langle 7,3\rangle$, $\langle 6,3\rangle$, $\langle 10,0\rangle$, $\langle 9,0\rangle$, $\langle 8,0\rangle$, $\langle 7,0\rangle$, $\langle 6,0\rangle$, $\langle 0,0\rangle$, $\langle 0,3\rangle$, $\langle 0,4\rangle$, $\langle 0,5\rangle$ и $\langle 0,6\rangle$. Изобразим их точками координатной плоскости (рис. 1).

Порядок, в котором применяются различные допустимые режимы работы, безразличен. Например, если бы Бригадир послал сначала шесть рабочих разгрузить второй склад, а затем всю бригаду направил на первый, работа была бы выполнена за те же $1\frac{11}{15}$ часа. Поэтому мы можем считать, что погрузка организована так: сначала t_1 часов применяется режим α_1, затем t_2 часов — режим α_2 и т. д. При этом t_i может равняться нулю, т. е. режим α_i может не использоваться. Например, при погрузке, рассмотренной в п. 1, нулю не равны только $t_4=\frac{4}{10}$ и $t_{13}=\frac{8}{6}$.

Пренебрежем временем переходов со склада на склад. Тогда общее время погрузки t будет равно

$$t=t_1+t_2+\ldots+t_{12}+t_{13}. \quad (1)$$

Поскольку каждый рабочий грузит в час тысячу кирпичей, количества кирпича, погруженного с первого склада (x тысяч штук) и со второго склада

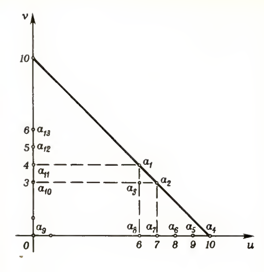


Рис. 1.

(y тысяч штук), выразятся равенствами

$$x = 6t_1 + 7t_2 + \ldots + 0t_{12} + 0t_{13}, \quad (2)$$

$$y = 4t_1 + 3t_2 + \ldots + 5t_{12} + 6t_{13}. \quad (3)$$

Фиксируем t. Подставляя в (2) и (3) различные неотрицательные числа t_1, t_2, ..., t_{13}, удовлетворяющие условию (1), мы будем получать, различные точки плоскости $\langle x, y \rangle$. Множество всех таких точек обозначим через A_t; назовем его *множеством достижимости за время* t. Это название естественно: A_t состоит из точек плоскости с координатами, равными количеству кирпича (в тысячах штук), который может погрузить бригада — соответственно, с первого и второго складов — за время t.

Теперь задача Бригадира может быть сформулирована следующим образом: составить такое расписание погрузки, при котором точка с координатами $\langle 4, 8 \rangle$ (эта точка соответствует заданным количествам кирпича на складах) принадлежит множеству A_t и t минимально.

3. Математик решает задачу

Первым делом Математик упростит задачу: он ограничится отысканием множества A_1, поскольку любое множество A_t гомотетично множеству A_1 с коэффициентом гомотетии t и центром гомотетии — началом координат.

Покажем, что множество A_1 является выпуклой оболочкой точек α_1, α_2, ..., α_{13}.

Вспомним, что множество M точек на плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любой парой своих точек оно содержит весь отрезок с концами в этих точках («Геометрия 6», п. 39). Примеры выпуклых множеств приведены на рисунке 2, множества на рисунке 3 не являются выпуклыми.

Выпуклая оболочка множества M — это наименьшее выпуклое множество, содержащее M (рис. 4). Поскольку пересечение произвольного числа выпуклых множеств выпукло (докажите!), выпуклая оболочка произвольного множества M совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих M (такие множества всегда — каково бы ни было M — существуют; почему?). Выпуклую оболочку множества M принято обозначать через conv M*).

Чтобы доказать, что множество достижимости A_1 является выпуклой оболочкой множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}\}$, дадим понятию выпуклой оболочки другое определение.

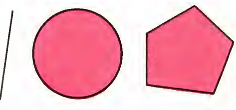


Рис. 2.

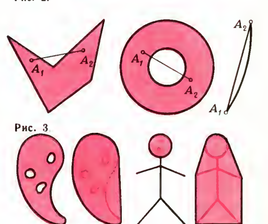


Рис. 3

Рис. 4 В обеих парах правое множество есть выпуклая оболочка левого множества.

---

*) От латинского convexus («выпуклый»).

Для этого введем две операции с точками координатной плоскости. *Суммой* точек $\langle x_1, y_1\rangle$ и $\langle x_2, y_2\rangle$ мы будем называть точку $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$. *Произведением* точки $\langle x, y\rangle$ на число t назовем точку $\langle tx, ty\rangle$. Если каждой точке α сопоставить вектор, определяемый парой точек O, α (O — начало координат), то введенные операции с точками совпадут с обычными операциями над векторами.

Докажите, что если множество M выпукло, то и множество tM (т. е. множество точек $t\beta$, где $\beta \in M$) тоже выпукло.

Определение. Точка β называется *выпуклой комбинацией* точек $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, если существуют такие неотрицательные числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$, что $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$ и $\beta = t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \ldots + t_n\beta_n$.

Теорема. *Выпуклая оболочка множества M состоит из всевозможных выпуклых комбинаций точек из M.*

Доказательство. Обозначим множество выпуклых комбинаций точек из M через Q. Если γ и δ — произвольные точки, то множество точек вида $t\gamma + (1-t)\delta$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, совпадает с отрезком с концами γ, δ. Отсюда легко вывести, что Q — выпуклое множество (проделайте это!). Кроме того, очевидно, $M \subset Q$. Следовательно, $\operatorname{conv} M \subset Q$. Докажем теперь индукцией по n, что любая выпуклая комбинация $t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \ldots + t_n\beta_n (t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1)$ точек из M принадлежит $\operatorname{conv} M$. Это будет означать, что $Q \subset \operatorname{conv} M$. При $n = 1$ соответствующее утверждение принимает вид: если $\beta \in M$, то $\beta \in \operatorname{conv} M$. Это верно по определению выпуклой оболочки. Пусть теперь все выпуклые комбинации n точек из M принадлежат $\operatorname{conv} M$. Докажем, что тогда и выпуклая комбинация $\delta = t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \ldots + t_n\beta_n + t_{n+1}\beta_{n+1}$ (где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$ — точки из M) принадлежит M:

$$\delta = (1 - t_{n+1})\left[\frac{t_1}{1 - t_{n+1}}\beta_1 + \frac{t_2}{1 - t_{n+1}}\beta_2 + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}\beta_n\right] + t_{n+1}\beta_{n+1}. \quad (4)$$

Из $t_1 + t_2 + \ldots + t_n + t_{n+1} = 1$ следует, что

$$\frac{t_1}{1 - t_{n+1}} + \frac{t_2}{1 - t_{n+1}} + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}} = 1.$$

По предположению индукции

$$\eta = \frac{t_1}{1 - t_{n+1}}\beta_1 + \frac{t_2}{1 - t_{n+1}}\beta_2 + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}\beta_n \in \operatorname{conv} M.$$

Из (4) вытекает, что точка δ лежит на отрезке с концами η и β_{n+1}. Так как $\beta_{n+1} \in M \subset \operatorname{conv} M$, а $\operatorname{conv} M$ — выпуклое множество, получаем $\delta \in \operatorname{conv} M$. Теорема доказана.

Таким образом, каждая точка из $\operatorname{conv} M$ является выпуклой комбинацией некоторого конечного набора точек из M. Если множество M конечно, то можно считать, что каждая точка из $\operatorname{conv} M$ есть выпуклая комбинация всех точек из M.

Оказывается, для произвольного множества M на плоскости каждая точка β множества $\operatorname{conv} M$ может быть получена как выпуклая комбинация трех точек $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ из M (разумеется, для разных β точки $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, вообще говоря, разные). Эта теорема, вернее — ее n-мерный аналог, называется *теоремой Каратеодори*. Попробуйте доказать ее!

По определению множество достижимости A_1 состоит из всевозможных точек $t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_{13}\alpha_{13}$, для которых $t_1 + t_2 + \ldots + t_{13} = 1$ (п. 2). Другими словами, A_1 состоит из всевозможных выпуклых комбинаций точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}$. По доказанной теореме

$$A_1 = \operatorname{conv}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}\}.$$

Из рисунка 1 ясно, что A_1 — множество точек четырехугольника $\alpha_1\alpha_4\alpha_9\alpha_{13}$ (точка α_2 лежит на прямой $\alpha_1\alpha_4$).

Чтобы найти минимальное t, при котором множество $A_t = t \cdot A_1$ содержит точку $\beta\langle 4, 8\rangle$ (рис. 5), вычислим координаты точки γ пересечения прямых $\alpha_9\beta$ и $\alpha_1\alpha_{13}$. Уравнение прямой, проходящей через

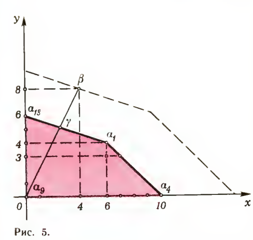


Рис. 5.

точки $\langle x_1, y_1 \rangle$, $\langle x_2, y_2 \rangle$, при $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ может быть записано в виде $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (почему?). Значит, координаты точки γ являются решением системы (см. рис. 5)

$$\begin{cases} \frac{y-0}{8-0} = \frac{x-0}{4-0}, \\ \frac{y-4}{6-4} = \frac{x-6}{0-6}. \end{cases}$$

Итак, $\gamma = \langle 2\frac{4}{7}, 5\frac{1}{7} \rangle$. Следовательно, искомое минимальное t равно

$$t = \frac{|\alpha_9\beta|}{|\alpha_9\gamma|} = \frac{\sqrt{4^2+8^2}}{\sqrt{\left(2\frac{4}{7}\right)^2 + \left(5\frac{1}{7}\right)^2}} = 1\frac{5}{9}.$$

Найдем расписание, которое позволяет выполнить работу за $1\frac{5}{9}$ часа. Так как точка γ лежит на отрезке $\alpha_{13}\alpha_1$, то все $t_i = 0$, за исключением t_1 и t_{13}, которые находятся из «векторного» уравнения $t_1\alpha_1 + t_{13}\alpha_{13} = \gamma$ или из «координатной» системы

$$\begin{cases} 6t_1 + 0t_{13} = 2\frac{4}{7}, \\ 4t_1 + 6t_{13} = 5\frac{1}{7}, \end{cases}$$

откуда $t_1 = \frac{4}{7}$, $t_{13} = \frac{3}{7}$. Итак, оптимальное расписание состоит из режима работы α_1 в течение $t \cdot t_1 = \frac{8}{9}$ (часа) и режима работы α_{13} в течение $t \cdot t_{13} = \frac{2}{3}$ (часа). Время, которое заняла бы вся работа по расписанию, составленному Бригадиром в п. 1, было равно $1\frac{11}{15}$ часа, что больше найденного минимального времени в $1\frac{4}{35}$ раза.

Подведем итоги. Мы видим, что совсем не геометрическая задача Бригадира естественно привела нас к выпуклым фигурам на плоскости. Оказывается, понятие выпуклости может быть определено не только для геометрических — плоских или пространственных — объектов, но и в значительно более общей ситуации (например, в так называемых векторных пространствах — см. «Квант», 1976, № 4, с. 2). В таком обобщенном виде оно «работает» во многих областях математики (функциональный анализ, математическое программирование, теория игр).

С интересными задачами, решаемыми с помощью понятия выпуклости, вы можете познакомиться в книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры» (М. — Л., Гостехиздат, 1951).

Задачу Бригадира можно решать и чисто алгебраически — методами линейного программирования. О том, как это делается, рассказывалось в «Кванте», 1976, № 7, с. 2. При таком подходе полезно заметить, что можно (см. рис. 1) рассматривать только те расписания, при которых

$$t_3 = t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = \\ = t_9 = t_{10} = t_{11} = t_{12} = 0.$$

Упражнения

1. Составить для Бригадира расписание, если

а) на первом складе — 16 тысяч кирпичей, на втором — 4 тысячи;

б) на первом складе одновременно должны работать не менее 7 человек.

2. Есть сковорода, на которой можно одновременно поджаривать две котлеты. Каждая котлета поджаривается с одной стороны одну минуту. За сколько времени удастся поджарить три котлеты?



В. Майер

«Липкая» струя

Объяснить теоретически результат эксперимента, который мы предлагаем вам проделать, довольно сложно. Но наблюдаемый эффект очень красив, а сам по себе опыт настолько прост, что вы без особого труда сумеете его выполнить.

Стеклянную трубку диаметром примерно 6 мм с оттянутым, как у пипетки, концом, отверстие которого имеет диаметр около 1 мм, резиновым шлангом соедините с краном водопровода. Пустив воду, получите струю и направьте ее на верхний конец стоящей вертикально чистой стеклянной трубки диаметром 4—6 мм и длиной около полуметра. При этом в зависимости от напора воды, расстояния и угла между трубками вы будете наблюдать замечательные явления: струя «прилипнет» к трубке, изменит направление своего движения, обогнет трубку и, наконец, несколько раз обовьет ее!

Интересно, что эффект прилипания струй жидкости или газа к твердой поверхности обратил на себя внимание молодого румынского авиатора Анри Коанда. В 1910 году, испытывая реактивный самолет, он обнаружил, что пламя двигателей «присасывается» к защитным плоскостям фюзеляжа. Эффект Коанда в настоящее время нашел и практическое применение.

А не встречались ли вы раньше с этим эффектом в быту?



Повороты и пересечения многогранников

Школьная программа уделяет большое внимание геометрическим преобразованиям и, в частности, повороту фигур. На заседаниях математического кружка мы рассматривали «нестандартные» задачи, когда поворачивают не плоскую фигуру, а пространственную. В таких задачах нужно хорошо представлять себе, как располагаются фигуры в пространстве после поворота, поэтому без геометрического воображения наметить путь решения трудно. А развить это воображение можно практикой. Думаем, что предложенные задачи помогут читателям в этом.

Задача 1. *Куб с ребром a повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины двух параллельных ребер, не принадлежащих одной грани куба. Найти объем общей части исходного и повернутого кубов.*

Наметим путь решения. Пусть M и N — середины двух параллельных и не принадлежащих одной грани ребер куба (рис. 1). Разрежем куб диагональной плоскостью, перпендикулярной отрезку MN. Получим две призмы. После поворота общая часть каждой призмы и ее образа будет состоять из прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат со стороной a, и правильной четырехугольной пирамиды с этим же основанием и вершиной в точке M или N (рис. 2), поэтому искомый объем V общей части кубов равен удвоенной сумме объемов параллелепипеда и пирамиды. Найдя длину высоты AA_1 параллелепипеда

$$|AA_1| = |EA_1| = a\sqrt{2}/2 - a/2 = a(\sqrt{2} - 1)/2$$

и высоту пирамиды

$$|MN|/2 - |AA_1| = a/2,$$

получаем:

$$V = 2\left(\frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{2} + a^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = a^3\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Задача 2. *Две диагонали двух кубов с ребром a лежат на одной прямой. Вершина второго куба совпадает с центром первого и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем общей части этих кубов.*

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, и второй куб получается из него параллельным переносом, переводящим вершину B в середину O диаго-

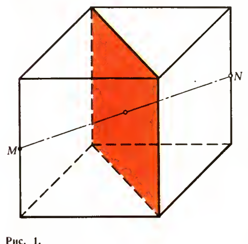


Рис. 1.

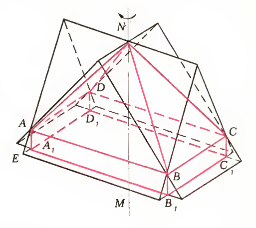


Рис. 2.

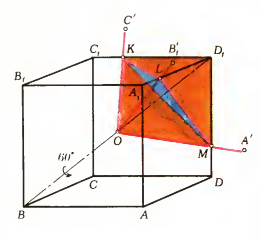


Рис. 3.

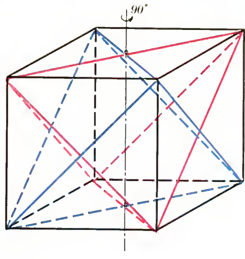


Рис. 4.

нали BD_1, и поворотом вокруг оси BD_1 на 60 (рис. 3). Можно сначала произвести поворот, а потом перенос. После поворота точка B_1 окажется в плоскости BA_1D_1 (докажите это самостоятельно), поэтому легко найти, что после переноса отрезок OB_1' (образ отрезка BB_1) пересечет отрезок A_1D_1 в точке L такой, что $|LD_1| = 3a/4$. Общая часть кубов будет составляться из двух треугольных пирамид D_1KLM и $OKLM$, боковые ребра каждой из которых попарно образуют прямые углы, а длины этих ребер равны $3a/4$. Отсюда получаем ответ:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{4}\, a\right)^3 = \frac{9a^3}{64}.$$

Задача 3. *Доказать, что если правильный тетраэдр повернуть на 90° вокруг прямой, соединяющей середины любых двух его скрещивающихся ребер, а затем получившийся тетраэдр повернуть на 90° вокруг прямой, соединяющей середины двух любых его скрещивающихся ребер, то последний тетраэдр совпадает с исходным.*

Если через каждое ребро правильного тетраэдра провести плоскость, параллельную противоположному ребру, то эти плоскости ограничат куб (рис. 4). Соединяя отрезками «через одну» вершины куба, мы снова получим тетраэдр — исходный (на рисунке красный) или еще один (синий). Нетрудно убедиться, что при поворотах, описанных в задаче, красный тетраэдр переходит в синий, а синий — в красный. Поэтому после двух поворотов тетраэдр перейдет в себя.

Упражнения

1. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a повернута вокруг высоты на угол 60°. Определить объем общей части исходной и повернутой пирамид, если боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

2. Два куба с ребром a получаются один из другого поворотом на 60° вокруг общей диагонали. Найти объем их общей части.

3. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общую высоту, а вершина каждого из них лежит в центре основания другого. Основание второго тетраэдра повернуто на 60° по отношению к основанию первого. Найти объем их общей части.

4. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер, но один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найти объем их общей части.

Статья подготовлена математическим кружком 71 школы им. Н. Островского (г. Киев, староста С. Ефименко)

задачник Кванта

Задачи

М471—М475; Ф483—Ф487

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 января 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М471, М472» или «Ф483». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

М471. Две пересекающиеся окружности вырезают из плоскости три ограниченные непересекающиеся области. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих трех областей.

С. Фомин

М472. Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую из граней совпадает с этой гранью. Докажите, что объем многогранника не меньше 1/3 объема куба.

В. Прасолов

М473. Имеется две группы по n гирь, в каждой из которых гири расположены в порядке возрастания их масс. Покажите, что

а) $2n-1$ взвешиваниями можно расположить и все $2n$ гирь в порядке возрастания их масс;

б) * меньшим $2n-1$ числом взвешиваний это сделать, вообще говоря, нельзя.

(За одно взвешивание сравниваются массы двух гирь; массы всех $2n$ гирь попарно различны.)

В. Гринберг

М474. Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей (кроме самого себя); таковы, например, числа $6=1+2+3$ и $28=1+2+4+7+14$. Докажите, что число N несовершенно, если известно, что оно

а) при делении на 4 дает остаток 3;

б) при делении на 6 дает остаток 5.

(До сих пор вообще неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.)

К. Сатаркулов, С. Югай

М475. а) Докажите, что правильный треугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы его вершины попали точно в узлы (в вершины клеток).

б) * Докажите, что на клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, можно при любом $\varepsilon>0$ нарисовать правильный треугольник, вершины которого находились бы на расстояниях меньше ε от трех различных узлов.

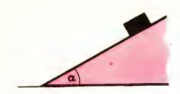


Рис. 1.

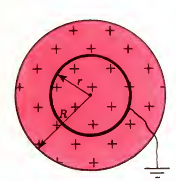


Рис. 2.

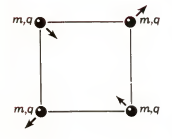


Рис. 3.

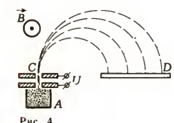


Рис. 4.

в) * Верно ли, что для любого многоугольника M и любого $\varepsilon > 0$ можно нарисовать на клетчатой бумаге подобный M многоугольник, все вершины которого находились бы на расстояниях меньше ε от различных узлов?

В. Калинников

Ф483. С каким горизонтальным ускорением должен двигаться клин с углом α (рис. 1), чтобы лежащий на нем груз поднимался вверх, если коэффициент трения между грузом и клином равен μ?

Ф484. Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного с объемной плотностью ρ, находится заземленная металлическая сфера радиуса r (рис. 2). Найдите зависимость потенциала этой системы от расстояния до центра сферы.

Ф485. Чему равен период малых колебаний четырех одинаково заряженных тел, связанных одинаковыми нитями длины l так, как показано на рисунке 3? На рисунке стрелками указаны направления движения тел при колебаниях в один и тот же момент времени. Масса и заряд каждого тела равны соответственно m и q.

Ф486. На рисунке 4 изображена схема масс-спектрометра. В ионизаторе A образуются ионы, которые ускоряются напряжением $U = 10$ кВ и входят через щель C в магнитное поле с индукцией $|\vec{B}| = 0{,}1$ Т. После поворота ионы попадают на фотографическую пластинку D и вызывают ее почернение. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на фотопластинке полосы, ионов H^+, $^2H^+$, $^3H^+$, He^+? Какова должна быть ширина щели, чтобы полосы ионов ^{16}O и ^{15}N разделились?

Ф487. Жука фотографируют в двух масштабах: с расстояния $l_1 = 3F$, где F — фокусное расстояние объектива, и с расстояния $l_2 = 5F$. Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одной и той же? Считать, что диаметр объектива в обоих случаях много меньше F.

Решения задач

М431—М433; Ф442—Ф444

М431. *В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть по лесу провод из точки A в точку B, расстояние между которыми равно l. Докажите, что для этой цели связисту достаточно иметь кусок провода длиной $1{,}6\,l$.*

Соединим точки A и B прямой. На участках, где нет деревьев, проведем провод по этой прямой. Там же, где прямая AB пересекает контур ствола, пустим провод по меньшей из двух дуг окружности, ограничивающей сечение ствола плоскостью, перпендикулярной к стволу (см. рис. 1). Покажем, что в этом случае длина провода не превосходит $\frac{\pi l}{2}$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — длины прямолинейных участков провода, а $b_1, \ldots, b_k$ — длины участков прямой AB, находящихся внутри стволов. Поскольку каждое b_i ($i=1, \ldots, k$) не превосходит диаметра соответствующей окружности, суммарная длина криволинейных участков провода не превосходит $\frac{\pi b_1}{2}+\ldots+\frac{\pi b_k}{2}$, а общая длина провода не превосходит

$$a_1+\ldots+a_n+\frac{\pi b_1}{2}+\ldots+\frac{\pi b_k}{2}<$$

$$<\frac{\pi}{2}(a_1+\ldots+a_n+b_1+\ldots+b_k)=\frac{\pi l}{2}<1{,}6\,l.$$

Величину $\frac{\pi l}{2}$ нельзя заменить в этом неравенстве меньшей, так как легко указать пример, когда потребуется провод длины ровно $\frac{\pi l}{2}$: в лесу растет единственное дерево диаметра l, а точки A и B — диаметрально противоположные точки окружности его ствола.

А. Альтшулер

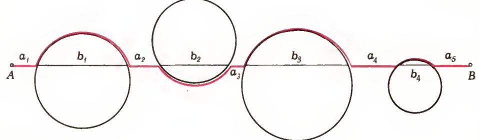


Рис. 1.

◆

М432. *Существует ли полный квадрат, сумма цифр которого равна*
а) 1977;
б) 1978?
в) Выясните, какие натуральные числа могут быть суммами цифр квадрата целого числа.

Решим сразу пункт в) задачи. Прежде всего заметим, что сумма цифр квадрата не может быть произвольной. Действительно, квадрат числа либо делится на 9, либо дает при делении на 9 остатки 1, 4, 7. По признаку деления на 9 то же верно и для суммы цифр квадрата, так что у квадрата сумма цифр может быть либо числом вида $9k$, либо $9k+1$, либо $9k+4$, либо $9k+7$. Покажем, что все такие числа действительно могут быть суммами.

В самом деле, число $9k$ — сумма цифр квадрата числа 10^k-1:

$$(10^k-1)^2=(10^k-2)\,10^k+1=\underbrace{99\ldots98}_{k}\,\underbrace{00\ldots01}_{k};$$

число $9k+1$ ($k\neq 0$) — сумма цифр квадрата числа 10^k-2:

$$(10^k-2)^2=(10^k-4)\,10^k+4=\underbrace{99\ldots96}_{k}\ \underbrace{00\ldots04}_{k}$$

(случай $k=0$ очевиден: $1=1^2$); число $9k+4$ ($k\neq 0$) — сумма цифр квадрата числа 10^k-3:

$$(10^k-3)^2=(10^k-6)\,10^k+9=\underbrace{99\ldots94}_{k}\ \underbrace{00\ldots09}_{k}$$

(при $k=0$ получаем число 4, а $4=2^2$). Число $9k+7$ — сумма цифр квадрата числа $10^{k+1}-5$:

$$(10^{k+1}-5)^2=(10^{k+1}-10)\,10^{k+1}+25=\underbrace{99\ldots90}_{k+1}\ \underbrace{00\ldots025}_{k+1}.$$

Таким образом, число 1978 может быть суммой цифр квадрата, а 1977 — нет.

Л. Лиманов

◆

М433. *В выпуклом пятиугольнике ABCDE сторона BC параллельна диагонали AD, сторона CD — диагонали BE, сторона DE — диагонали AC и сторона AE — диагонали BD (рис. 2). Докажите, что сторона AB параллельна диагонали CE.*

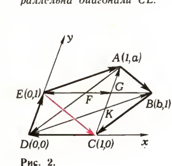


Рис. 2.

Пусть $F=[AD]\cap[BE]$, $G=[AC]\cap[BE]$ и $K=[BD]\cap[AC]$ (см. рис. 2).

Из подобия треугольников AEF и BCD следует, что $\frac{|AF|}{|EF|}=\frac{|BC|}{|CD|}$. Следовательно, $\frac{|AF|+|BC|}{|EF|+|CD|}=\frac{|BC|}{|CD|}$ и $\frac{|AD|}{|BE|}=\frac{|BC|}{|CD|}$, поскольку $|BC|=|DF|$, $|BF|=|CD|$, то есть

$$\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{|CD|}{|BE|}. \qquad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников BKC и AED получаем, что

$$\frac{|AE|}{|BD|}=\frac{|DE|}{|AC|}. \qquad (2)$$

Наконец, из подобия треугольников BKG и AGE $\frac{|BG|}{|BK|}=\frac{|CD|}{|AE|}$, откуда $\frac{|BE|}{|BD|}=\frac{|CD|}{|AE|}$,

или

$$\frac{|CD|}{|BE|}=\frac{|AE|}{|BD|}. \qquad (3)$$

Из соотношений (1) — (3) следует, что

$$\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{|CD|}{|BE|}=\frac{|AE|}{|BD|}=\frac{|DE|}{|AC|}=\lambda. \qquad (4)$$

Далее:

$$\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE}+\vec{EA}+\vec{AB}=\vec{0},$$
$$\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{DB}+\vec{CA}+\vec{EC}=\vec{0},$$

и $\vec{BC}=\lambda\vec{AD}$, $\vec{CD}=\lambda\vec{BE}$, $\vec{DE}=\lambda\vec{CA}$, $\vec{EA}=\lambda\vec{DB}$. Поэтому

$$\vec{0}=\lambda(\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CA}+\vec{DB})+\vec{AB}=-\lambda\vec{EC}+\vec{AB},$$

откуда $\vec{AB}=\lambda\vec{EC}$, что и означает параллельность стороны AB диагонали EC.

Более короткое решение получается с помощью косоугольной системы координат. Пусть точки D, C и E имеют координаты $D\,(0;\,0)$, $C\,(1;\,0)$, $E\,(0;\,1)$ (рис. 2). Тогда A и B имеют координаты $(1;\,a)$ и $(b;\,1)$, так как $(CD)\parallel(BE)$, $(DE)\parallel(AC)$.

Условия параллельности $(AE) \parallel (BD)$ и $(BC) \parallel (AD)$ записываются так:

$$\frac{a-1}{1-0} = \frac{1-0}{b-0} \text{ и } \frac{1-0}{b-1} = \frac{a-0}{1-0},$$

то есть $b(a-1) = 1$, $a(b-1) = 1$, откуда $a = b$ и $\frac{a-1}{1-b} = \frac{1-0}{0-1}$, то есть $(AB) \parallel (EC)$.

Заметим, что пятиугольник $ABCDE$, о котором идет речь в этой задаче, можно аффинным преобразованием (или просто перекосом) превратить в правильный.

И. Клумова, Э. Туркевич

◆

Ф442. *Шарики с массами 1, 2, 3 и 4 кг соединены легкими стержнями длиной l м каждый. Стержни скреплены, так что они образуют крест (рис. 3). Система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка. Найти амплитуду колебаний системы, если в начальный момент стержень, соединяющий грузы с массами $m_2 = 2$ кг и $m_4 = 4$ кг, был вертикален и шары были неподвижны.*

Прежде всего найдем положение равновесия системы. В состоянии равновесия алгебраическая сумма моментов всех действующих на систему сил относительно оси вращения равна нулю (рис. 4):

$$m_1|\vec{g}|l\cos\alpha + m_4|\vec{g}|l\sin\alpha - m_3|\vec{g}|l\cos\alpha - m_2|\vec{g}|l\sin\alpha = 0,$$

где l — длина стержней, α — угол, сбразуемый стержнем AO с вертикалью. Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_3 - m_1}{m_4 - m_2} = 1, \text{ и } \alpha = 45°.$$

Это означает, что центр тяжести системы лежит на биссектрисе угла, образуемого стержнями AO и OB. Тогда из закона сохранения энергии непосредственно следует, что угловая амплитуда колебаний системы составляет угол 45°.

И. Слободецкий

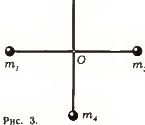


Рис. 3.

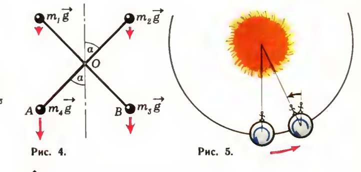


Рис. 4. Рис. 5.

◆

Ф443. *Как известно, земной шар делает полный оборот вокруг своей оси за 23 часа 56 минут 4 секунды. Следовательно, за сутки все часы, циферблат которых разделен на 24 часа, должны отставать почти на 4 минуты. Это составляет почти полчаса в неделю. Почему же мы не замечаем этого отставания и не подводим все часы непрерывно?*

Земной шар совершает полный оборот вокруг своей оси за время $T = 23$ ч 56 мин 4 с. Поэтому неподвижному наблюдателю на Земле кажется, что звезды на небосводе за время T совершают полный оборот вокруг некоторой точки небесной сферы и оказываются на прежних местах.

Однако ближайшая к Земле звезда — Солнце — снова пересекает плоскость, проходящую через меридиан наблюдателя, почти на 4 мин позже, а именно через 24 ч. Иными словами, хотя земной шар совершает полный оборот вокруг своей оси за 23 ч 56 мин 4 с, Солнце «обходит» Землю за 24 ч (и именно на 24 ч, в связи с этим, разделен циферблат всех земных часов).

Это происходит потому, что за время полного оборота вокруг собственной оси Земля в своем орбитальном движении вокруг Солнца успевает продвинуться приблизительно на 1/365 часть длины орбиты (рис. 5). Направление вращения Земли вокруг Солнца совпадает с направлением ее вращения вокруг собственной оси. Поэтому чтобы земной наблюдатель увидел Солнце, грубо говоря, на прежнем месте (и отметил, например, наступление полудня по своим часам), земной шар должен дополнительно совершить 1/365 часть оборота, что и занимает почти 4 минуты.

Б. Буховцев

Ф444. *Тяжелый ящик массы M скатывается по роликам, образующим наклонную плоскость (рис. 6). Расстояние между роликами l, их радиусы r и массы m. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Найти скорость движения ящика, если известно, что она постоянна. Считать, что ролики полые и толщина их стенок $d \ll r$.*

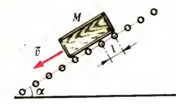


Рис. 6.

При движении ящика вниз по наклонной плоскости находящиеся под ним ролики приходят в движение — начинают раскручиваться. Тот факт, что ящик движется с постоянной скоростью, означает, что на него со стороны роликов действует сила сопротивления $\vec{F} = -M\vec{g}\sin\alpha$.

Предположим, что ящик движется со скоростью $\vec{v}$ и его длина достаточно велика, так что он успевает раскрутить ролик до линейной скорости $u = |\vec{v}|$. Ролик раскручивается благодаря силе трения $\vec{f}$, действующей на него со стороны ящика до тех пор, пока его линейная скорость не станет равной $|\vec{v}|$. После этого трение между этим роликом и ящиком исчезает.

Из соображений симметрии ясно, что действие силы трения на ролик равноценно действию такой же по абсолютному значению силы $|\vec{f}|$, приложенной к ролику в любой его точке по касательной к ободу ролика и «вращающейся» вместе с роликом. Так как действующая на ролик сила трения постоянна по абсолютному значению, линейная скорость вращения ролика под действием силы $|\vec{f}|$ изменяется со временем по линейному закону. Пусть ролик раскручивается за время τ до линейной скорости $u = |\vec{v}|$. Сила $\vec{f}$ совершает при этом работу $|\vec{f}||\vec{v}|\tau/2$ (средняя скорость ролика равна $|\vec{v}|/2$, путь, проходимый точкой приложения силы, равен $|\vec{v}|\tau/2$). Эта работа равна кинетической энергии ролика:

$$\frac{|\vec{f}|\,|\vec{v}|\,\tau}{2} = \frac{m\,|\vec{v}|^2}{2}. \qquad (1)$$

Поскольку ролик раскручивается до линейной скорости $|\vec{v}|$ за время τ, под ящиком все время находятся $N = |\vec{v}|\,\tau/l$ роликов, линейная скорость которых меньше $|\vec{v}|$. Сила трения, с которой эти ролики действуют на ящик, равна

$$|\vec{F}| = N|\vec{f}| = \frac{|\vec{v}|\,\tau}{l}|\vec{f}| = M|\vec{g}|\sin\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) имеем: $|\vec{v}|\,\tau\,|\vec{f}| = m|\vec{v}|^2$. Подставив это выражение в (2), получим:

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{l} = M|\vec{g}|\sin\alpha.$$

Отсюда

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{M}{m}|\vec{g}|\,l\sin\alpha}$$

Т. Петрова

Как решить кубическое уравнение?

Многие из вас читали о драматической истории, связанной с решением кубических уравнений (см. «Квант», 1976, № 9). Современная алгебраическая символика позволяет теперь справиться с этой задачей даже школьнику, а в XVI веке это было не по силам даже ведущим математикам. Вот какой изящный способ предлагает наш читатель В. Кривошеев (г. Черкассы).

Известно, что любое кубическое уравнение может быть приведено к виду

$$y^3 + by + c = 0.$$

Случайно я обнаружил следующие подстановки для его решения.

а) Пусть $b>0$. Положим

$$y = \sqrt{\frac{b}{3}}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

получится (легко проверить) уравнение

$$\frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + c = 0.$$

Далее положим $z^3 = t$, после приведения к общему знаменателю получится квадратное относительно t уравнение.

б) Пусть $b<0$. Положим

$$y = \sqrt{\frac{|b|}{3}}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

и далее аналогично п. а).

А. Савин

ЧТО ЗНАЧИТ „БОЛЬШЕ“?



Про любые два числа мы всегда можем сказать, какое из них больше; для этого достаточно сравнить их десятичные записи. Не вызывает кривотолков и вопрос «Какой из двух отрезков больше?» Очевидно, тот, у которого больше длина. Сравнить длины отрезков мы можем и не вычисляя их, а просто переместив их так, чтобы они оказались на одном и том же луче, и один из концов каждого отрезка совпал с началом луча. Так и в споре двух ребят — «Кто выше» — дело, как правило кончается тем, что они становятся спиной друг к другу и кто-то с помощью ладони разрешает этот спор.

А вот как понять такое утверждение: «Ребята в нашем классе выше чем в вашем!»? Можно его понимать так:

«Самый высокий ученик нашего класса выше, чем самый высокий ученик вашего класса», или — «Самый низкий ученик нашего класса выше самого низкого ученика вашего класса» или — «Любой ученик нашего класса выше любого ученика вашего класса». Можно предложить еще несколько способов сравнения, но очень трудно какому-либо из них отдать предпочтение.

Как мы увидим, подобная ситуация возникает при попытке решить задачу № 137 из учебника геометрии для 10 класса. Напомним ее формулировку.

137. В правильной шестиугольной пирамиде большее диагональное сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой с. Найдите объем пирамиды.

Чтобы понять условие задачи, следует вспомнить, что такое диагональное сечение. В условии задачи № 89 было дано определение:

«Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называется диагональным сечением».

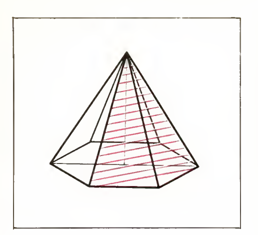
К сожалению, в учебнике не оказалось определения сечения пирамиды (и вообще тела) плоскостью, но из того, как это слово употреблялось, можно сделать вывод, что

«Сечение тела плоскостью — это геометрическая фигура, состоящая из всех точек, одновременно принадлежащих и телу и плоскости» (пересечение тела и плоскости).

Осталось понять, что значит «большее». Поскольку диагональными сечениями пирамиды, очевидно, являются треугольники, то осталось выяснить, что значит, что один треугольник больше, чем другой.

Вариантов ответа можно предложить очень много. Например, «Тот, у которого больше периметр», или «Тот, у которого больше площадь», или «Тот, у которого больше радиус вписанной окружности», или «Тот, у которого больше радиус описанной окружности», или «Тот, у которого больше бóльшая сторона»...

Нужно заметить, что в реальных ситуациях «величину» треугольника может характеризовать каждое из перечисленных выше чисел, связан-



ных с треугольником. Однако чаще всего в качестве числа, характеризующего величину плоской фигуры, берут площадь этой фигуры (а для пространственных фигур — их объем). Две плоские фигуры, имеющие одинаковые площади, принято называть *равновеликими*.

По-видимому, в задаче 137 имеется в виду, что «бо́льшее диагональное сечение» — это диагональное сечение, проходящее через большу́ю диагональ.

В этом случае решение задачи не сложно. Высота пирамиды совпадает с высотой треугольника, равной $\frac{c}{2}$, а длина стороны шестиугольника также равна $\frac{c}{2}$. Отсюда площадь основания пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2$, а объем $\frac{c^3\sqrt{3}}{16}$. Именно этот ответ и приведен в учебнике.

Ну, а если понимать под величиной треугольника его площадь? И в этом случае задача также не слишком сложно решается. Во-первых, заметим, что диагональные сечения правильной пирамиды являются треугольниками с двумя конгруэнтными сторонами, являющимися боковыми ребрами пирамиды. Если обозначить длину бокового ребра через l, то площадь рассматриваемого треугольника равна $\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$, где α — угол между указанными сторонами, и то из сечений больше, у которого больше синус этого угла.

Во-вторых, заметим, что если указанный угол — прямой, то из сказанного выше следует, что такое сечение и является наибольшим.

Случай, в котором наибольшее сечение проходит через большую диагональ, уже разобран. Осталось рассмотреть случай, когда оно проходит через другую диагональ. В этом случае длина этой диагонали равна c, длина большой диагонали $\frac{2c\sqrt{3}}{3}$, а стороны шестиугольника $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Длина бокового ребра равна $\frac{c\sqrt{2}}{2}$, а высота пирамиды $h = \sqrt{\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{3}} = c\sqrt{\frac{1}{6}}$. Окончательно получаем, что площадь основания равна $\frac{c^2\sqrt{3}}{2}$, а объем пирамиды $\frac{c^3\sqrt{2}}{12}$.

В чем цель этой заметки? Конечно же, не в том, чтобы указать на неудачную задачу в учебнике, а в том, чтобы еще раз дать вам возможность убедиться, что математика — это наука, в которой все понятия и отношения между ними должны быть строго определены (конечно, за исключением основных, не определяемых понятий, таких, как точка, плоскость, прямая).

Хочется еще отметить и тот факт, что один и тот же термин может в разных книгах выступать в разных ролях. Естественно, что в соответствующей книге или статье дается строгое определение этому термину.

И в заключение — задача.

Про прямой круговой конус известно, что максимальная площадь сечения его плоскостью, проходящей через вершину, в два раза больше площади осевого сечения. Найти угол осевого сечения.

Задачи



1. а) На очередном занятии математического кружка, посвященном проблеме четырех красок, шесть участников кружка решили поэкспериментировать — чертить разные карты и пытаться их раскрашивать в четыре цвета так, чтобы соседние «страны» были раскрашены разными цветами. Для этого потребовались карандаши четырех разных цветов.

У учителя было много красных, синих, желтых и зеленых карандашей, но он не хотел, чтобы каждый школьник раскрашивал карты в одиночку. Он решил так раздать ребятам карандаши, чтобы никакие два школьника (из шести!) не имели карандашей всех четырех цветов, но любые три — имели.

Сумеет ли он это сделать?

б)* Попробуйте выяснить, при каких n можно так раздать шести ребятам карандаши n цветов, чтобы каждые трое имели (вместе) карандаши всех n цветов, а никакие двое — не имели.

2. Какими цифрами нужно заменить буквы, чтобы равенство

$$\begin{array}{r} ab \\ +\,bc \\ ca \\ \hline abc \end{array}$$

выполнялось?

3. Мне сейчас в 4 раза больше лет, чем было моей сестре, когда она была моложе меня в два раза. Сколько лет сейчас каждому из нас, если через 15 лет нам вместе будет 100 лет?

4. Найдите все целые числа m, n, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{m+\sqrt{m}}=n$.



В этой заметке рассказывается о двух простых опытах, в которых наблюдается интересное изменение цвета. Эти опыты вы, конечно, сможете проделать сами. Для их проведения требуется очень немного — лишь несколько цветных источников света. Например, красная лампочка (ее можно купить в магазине фототоваров) и синяя (такие лампочки продаются в магазинах электротоваров наряду с обычными).

Зеленая тень

В комнате, освещенной обычным белым светом, зажгите настольную лампу, предварительно ввернув в ее патрон красную лампочку. Положите на стол лист белой бумаги и поместите между ним и лампой какой-нибудь небольшой предмет, например, карандаш. На листе бумаги появится его тень, но она будет совершенно неожиданной по цвету — не черной и не серой, а ... *зеленой*.

Этот эффект, видимо, связан не только и не столько с физикой, сколько с физиологией и психологией. Тень от предмета кажется нам зеленой вследствие контраста с окружающим фоном, который, будучи на самом деле красноватым, ощущается нами как белый, ибо мы знаем, что бумага белая. Видимо, отсутствие красного цвета на участке, занятом тенью, наше сознание воспринимает как наличие зеленого цвета на этом участке. Но почему именно зеленого?

Дело в том, что красный и зеленый цвета являются *дополнительными*. Так называют цвета, дополняющие друг друга до белого. А что это означает? Еще в XVII веке Ньютон обнаружил, что белый солнечный свет является сложным, представляет собой совокупность простых цветов — фиолетового, синего, голубого, зеленого, желтого, оранжевого и красного. В этом можно убедиться, например, с помощью стеклянной призмы. Если солнечный свет пропустить через узкую щель и направить на призму, то получится *разноцветное изображение* этой щели. Ньютон проводил и другие опыты — «собирал» вместе все цвета (например, с помощью линзы) и в результате вновь получал белый цвет (рис. 1). При этом оказывается, что, если «задержать» какой-нибудь цвет, скажем, зеленый, то изображение щели становится цветным, и притом красным (рис. 2). Или, если «задержать» желтый цвет, изображение щели получится синим и т. д. Именно в этом смысле зеленый и красный, желтый и синий и т. п. цвета называются дополнительными (рис. 3).

Этот интересный опыт можно проводить и с лампочками других цветов. Так, если лампочка будет зеленой, то тень станет красной. Если лампочка будет синей, то тень получится желтой, а если лампочка будет желтой, тень окажется синей. Вообще цвет тени всегда получается дополнительным к цвету лампочки.

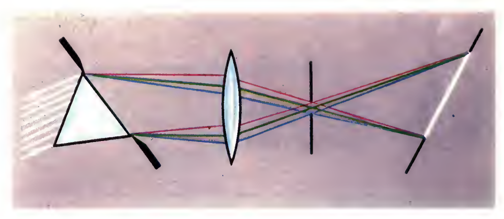


Рис. 1.

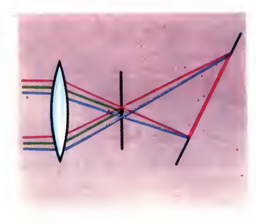


Рис. 2.

Рис. 3.

Описанное явление можно часто наблюдать зимой вблизи газосветных городских вывесок. Когда на земле лежит снег, на нем ясно видны тени, цвет которых дополнителен к цвету светящейся вывески.

Красные листья

Погасите в комнате свет и зажгите лампу, предварительно поменяв в ней обычную лампочку на синюю. Посмотрите при свете этой лампочки на листья растений: зеленые листья, освещенные синим светом, кажутся не зелеными и не синими, а ... *красными*. В чем же дело? Оказывается, стекло синей лампочки пропускает не только синий, но частично и красный свет. Вместе с тем, листья растений отражают не только зеленый свет, но отчасти и красный, поглощая другие цвета. Поэтому когда на листья падает свет от синей лампочки, они отражают *только красный свет* и, следовательно, кажутся нам красными.

Описанный эффект можно получить и иначе: посмотрите на листья растений через синие очки или через синий светофильтр. Рассказывая об опыте с такими очками, известный советский ученый К. А. Тимирязев писал: «Стоит их только надеть, и весь мир представляется в «розовом свете». Под ясным синим небом развертывается фантастический ландшафт с караллово-красными лугами и лесами...».



XI Всесоюзная олимпиада школьников

И. Клумова, М. Смолянский

Олимпиада по математике

В этом году XI Всесоюзная олимпиада школьников была посвящена 60-летию Великого Октября.

Заключительный тур по математике XI Всесоюзной олимпиады проходил в столице Эстонии—городе Таллине.

В Таллин приехали 153 школьника — победители республиканских олимпиад и ребята, занявшие I и II места на предыдущей олимпиаде. Впервые на олимпиаде была представлена команда (3 человека) учеников профессионально-технических училищ, победителей олимпиады ПТУ г. Ленинграда. Хозяева заключительного тура олимпиады — таллинцы — также выставили свою команду из 3-х человек.

В соревнованиях приняли участие 42 восьмиклассника, 56 девятиклассников и 55 десятиклассников.

Открытие заключительного этапа XI Всесоюзной олиапиады состоялось 14 апреля в актовом зале Таллинского политехнического института. Председатель Оргкомитета академик АН Эстонской ССР А. К. Хумал поздравил участников олимпиады с началом состязаний, пожелал им успехов и зачитал приветствие и поздравление министра просвещения СССР Прокофьева М. А.

Почти полгода жюри придирчиво отбирало задачи для олимпиады из большого списка задач-«кандидатов», представленных математиками из разных городов. Чтобы читатели смогли оценить эти задачи, мы полностью приводим их условия. Большинство из них уже было опубликовано в «Задачнике «Кванта» (см. №№7—9)*).

Как обычно, заключительный этап олимпиады проводился в два тура.

К решению задач первого тура школьники приступили 15 апреля. На решение задач каждому классу отводилось по 5 часов.

Ниже мы приводим список задач первого тура.

8 класс

1. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар четно. (М457)

2. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю. (М451)

3. Отрезок, соединяющий середины дуг AB и AC окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках K и L. Докажите, что точки A, K, L и центр O вписанной окружности треугольника ABC — вершины ромба.

4. По окружности расположено несколько черных и белых фишек. Двое по очереди проделывают такую операцию. первый убирает все черные фишки, имеющие белого соседа (хотя бы с одной стороны), а второй

*) В скобках после условия мы приводим номер, под которым соответствующая задача помещена в «Задачнике».

после этого убирает все белые фишки, имеющие черного соседа. Так они делают до тех пор, пока не останутся все фишки одного цвета.

а) Пусть вначале было 40 фишек. Может ли случиться, что после того, как каждый сделает два хода, на окружности останется одна фишка?

б) На окружности сначала было 1000 фишек. Через какое наименьшее число ходов на окружности может остаться одна фишка?

9 класс

1. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике $T_1 \cap T_2$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке. (М452)

2. Дана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $\lim\limits_{n \to \infty} \left(a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n \right) = 0$. Докажите, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

3. См. задачу № 1 из 8-го класса.

4. В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту. (М459)

10 класс

1, 2. См. задачи № 1 и № 2 из девятого класса.

3. В каждой вершине выпуклого многогранника M сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу. (М456)

4. Написан многочлен $x^{10} + {*}x^9 + {*}x^8 + \ldots + {*}x^2 + {*}x + 1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает пер-

			Номера задач											
			1	2	3	4		5	6		7	8		
						а	б		а	б		а	б	в
8 класс (43 чел.)	число решивших	+	12	4	18	17	4	4	27	4	0	5	7	0
		±	4	0	0	3	10	5	7	1	0	1	0	2
		∓	2	1	8	3	6	6	5	0	1	0	2	0

			1	2	3	4	5	6	7	8
9 класс (56 чел.)	число решивших	+	14	18	19	0	16	3	4	3
		±	8	3	3	0	2	0	0	1
		∓	1	0	2	0	4	0	9	0

			1	2	3	4	5	6					7				8				
								а	б	в	г	д	а	б	в	г	а	б	в	г	д
10 класс (I тур — 54 чел. II тур — 55 чел.)	число решивших	+	7	12	22	3	10	14	8	5	3	0	18	2	0	0	15	17	10	12	0
		±	9	5	10	0	2	4	3	1	0	0	8	0	0	0	0	2	2	0	1
		∓	3	5	2	10	10	10	5	3	2	2	1	7	0	0	11	5	5	2	9

вый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого? (М458)

5. См. задачу № 1 из 8-го класса.

Самой трудной для школьников восьмого класса оказалась задача № 2. После проверки работ выяснилось, что ее решили только четыре человека. Трудности вызвала и задача № 4, особенно пункт б).

У десятиклассников самой трудной оказалась задача № 4 — ее решили всего лишь три человека.

А девятиклассники решали свои задачи примерно одинаково. Как именно школьники справились с задачами, видно из приведенной таблицы. В ней для каждого класса показано, сколько человек решили ту или иную задачу полностью (оценка «+»), сколько — «почти» полностью, с небольшими недочетами (оценка «±»), сколько — в целом не решивших задачу, но высказавших существенные идеи по поводу ее решения (оценка «∓»). Вы, конечно, обратили внимание на то, что у десятых классов число участников в первом и во втором турах не одно и то же. Один из участников — С. Самигулин (из команды РСФСР) ехал в Таллин из Башкирии; он задержался из-за нелетной погоды и опоздал на первый тур. В Таллине пришлось специально для него срочно составить еще один вариант задач (утвержденные задачи I тура были уже известны). Во втором туре С. Самигулин решал уже одинаковые со всеми задачи: десятиклассников стало 55, как и должно было быть с самого начала.

16 апреля все школьники приняли участие в коммунистическом субботнике. А жюри олимпиады в это время проверяло работы.

Продолжение состязаний происходило 17 апреля. Школьники восьмых и девятых классов снова решали по 4 задачи, школьники десятых классов — три. Вот эти задачи.

8 класс

5. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того как последний, седьмой, гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке? (М454)

6. Будем называть $2n$-значное число *особым*, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Возможны ли шестизначные особые числа? (Докажите, что их нет, или приведите пример такого числа.)

7. Дано множество положительных чисел $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ..., n слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2. (М453)

8. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

9 класс

5. Дан квадратный лист клетчатой бумаги 100×100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что, кроме вершин квадрата, найдется узел (внутри или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

6. Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Суммы $x_1+x_2+\ldots+x_m$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

7. На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.

8. На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила

левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R: $LRLRLR$... Здесь буква L обозначает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б) Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний. (М461)

10 класс

6. Мы будем рассматривать многочлены от одного переменного со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q *коммутируют*, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (то есть после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа α найдите все многочлены Q степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x)=x^2-\alpha$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите все многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены Q и R коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов $P_2, P_3, P_4, \ldots$ $\ldots, P_k, \ldots$, где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x)=x^2-2$.

7. Пусть A — $2n$-значное число (первая цифра не нуль). Будем называть число A *особым*, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами: при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

в) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число. (М460)

8. Марсианский алфавит состоит из 10 букв, и любое трехбуквенное слово образует марсианскую фамилию (то есть на Марсе ровно 1000 различных фамилий). По марсианским законам имя марсианина должно состоять из двух букв и получаться из его фамилии вычеркиванием одной буквы.

а) Докажите, что можно составить список из 50 имен так, чтобы марсианин с любой фамилией мог выбрать себе одно из этих имен.

б) Докажите, что нельзя составить такой список менее чем из 40 имен.

в) Докажите, что нельзя составить такой список менее чем из 50 имен.

г) В прошлом веке марсиане носили четырехбуквенные фамилии, а двубуквенное имя получалось из фамилии вычеркиванием любых двух букв. Докажите, что в прошлом веке можно было обойтись списком из 34 имен.

д) Найдите минимальный список имен (двубуквенных), который годился бы, если бы фамилии марсиан состояли из k букв. Попробуйте решить эту задачу для $k=4$, 5, 6 и так далее.

Пожалуй, второй день оказался для восьмиклассников более тяжелым (как, впрочем, и для других классов). А особенно сложной — последняя задача № 8 (конечно, если не принимать во внимание совсем уж «непосильную» задачу № 7, до которой школьники не дошли, потратив много времени на поиски ответов в других задачах). Последний пункт этой задачи решила всего одна участница — Гаянэ Шахбозян — ученица физико-математической школы № 45 при Ленинградском государственном университете, получившая в результате I премию. Лучшей же работой по итогам двух дней состязаний была признана работа ученика той же школы Ильи Захаревича. Вообще надо отметить, что ФМШ при ЛГУ добилась на олимпиаде прекрасных результатов: ее воспитанники получили 3 первых, 1 вторую и 2 третьих премии; эта школа была награждена специальным призом «За лучшие результаты».

Вторым днем в десятом классе был исследовательский тур (в прошлом году такой тур был в каждом классе). Десятиклассникам было предложено три сложных задачи, каждая из которых была разбита на несколько пунктов, расположенных в порядке возрастания трудности. Задача № 6 связана с алгеброй, № 8 — арифметическая, а задача № 7 — это развитие задачи № 6 для восьмого класса. Листки с условиями задач, розданные школьникам, начинались словами обращения жюри: «*Во второй день олимпиады мы предлагаем вам три трудные задачи. Рекомендуем выбрать одну из них и продвинуться в ее решении как можно дальше. Жюри будет значительно выше оценивать более глубокое исследование одной задачи, чем ответы на легкие вопросы в нескольких задачах*». К сожалению, значительного продвижения в каждой из



Восьмиклассники, награжденные дипломами I степени (слева направо): С. Хлебутин, А. Ляховец, Г. Шахбозян, И. Захаревич.



Девятиклассники, награжденные дипломами I степени (слева направо): Л. Лисичнчук, В. Бугаенко, В. Книжник, В. Гальперин, В. Нейман.



Десятиклассники, награжденные дипломами I степени (слева направо): Д. Флаасс, А. Чурбанов, Г. Рыбников, Л. Гандельсман.

предложенных задач ни у одного десятиклассника не оказалось. Так как исследовательский тур проводился в порядке эксперимента, жюри приняло решение считать основными результаты первого дня. Результаты второго дня могли их только улучшить.

В свободное от решения задач время ребята совершили несколько экскурсий по Таллину и его музеям (ведь Таллин — это город-музей средневековья, один из красивейших и интереснейших городов Советского Союза), побывали в лабораториях самого крупного в Таллине вуза — политехнического института, были в театре оперы и балета «Эстония», встречались с учеными, с таллинскими школьниками. 18-го и 19-го апреля для ребят было прочитано несколько интересных лекций: «Геометрия Лобачевского и небесная механика» (лектор — профессор МГУ В. А. Алексеев), «Как измеряют расстояния между кривыми» (лектор — доцент МГУ В. А. Скворцов), «Системы счисления» (лектор — профессор И. М. Яглом), «Теорема Абеля-Руффини» (лектор — кандидат физико-математических наук Д. Б. Фукс), «Теория групп и олимпиадные задачи» (лектор — кандидат физико-математических наук А. К. Толпыго). Председатель жюри по 8-му классу кандидат физико-математических наук Н. Н. Константинов провел со школьниками восьмых классов несколько занятий «Математического кружка». Была организована встреча жюри с учениками математических школ Таллина.

Пока мы все время говорили только о победителях (ведь все участники Всесоюзной олимпиады — это победители школьных, областных, и, наконец, республиканских олимпиад). А теперь мы обращаемся к любителям «царицы наук», не попавшим в число победителей. Не огорчайтесь! Неудача на олимпиаде — вовсе не показатель неспособности к математике. Многие математики не принадлежат к «спортивному» или «олимпиадному» типу. Они медленно решают трудные задачи и доказывают сложные теоремы. Важно быть усидчивым и трудолюбивым человеком, глубоко интересоваться наукой. Научиться математике можно лишь, постоянно решая задачи, обдумывая всевозможные обобщения, придумывая свои задачи и

теоремы. В этом большую помощь может оказать вам «Квант».

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 19 апреля. Заместитель председателя жюри М. И. Башмаков зачитал решение жюри XI Всесоюзной математической олимпиады. Итак, по итогам двух дней состязаний было решено присудить 13 первых, 24 вторых, 24 третьих премии и отметить похвальными отзывами I степени 32 участника олимпиады и похвальными отзывами II степени — 36 участников. Имена победителей XI Всесоюзной олимпиады мы публикуем на с. 72.

Кроме того, различные организации и предприятия Эстонии учредили специальные призы (за лучший результат, за самое оригинальное решение, лучшему по республике, представителю самого отдаленного уголка Советского Союза и т. д.), которыми были награждены многие школьники. Специальный приз журнала «Квант» — подшивку журнала за 1976 год с автографом главного редактора академика И. К. Кикоина — получил школьник 8-го класса из г. Таллина Марк Левин (он участвовал в соревнованиях вне конкурса, и поэтому ему не было присуждено никакого официального места). Подпиской на журнал «Квант» на 1978 год были награждены также восьмиклассники: Ляховец Андрей (Краснодар), Хлебутин Сергей (Пермь), Бернотас Андрюс (Вильнюс), Власов Вячеслав (Киев), Ирматов Анвар (Наманган УзССР).

По итогам олимпиады была составлена команда для участия в XIX Международной олимпиаде школьников по математике. В состав команды вошли: А. Амброладзе (Тбилиси), А. Аузиньш (Рига), Я. Винишин (Киев), В. Гальперин (Москва), А. Кодрян (Рыбница), Г. Рыбников (Москва), Д. Флаасс (Новосибирск) и А. Чурбанов (Москва). XIX Международная олимпиада проходила в Белграде (Югославия). Мы расскажем об этой олимпиаде в одном из следующих номеров журнала.

Л. Лиманов

Решение задач олимпиады

В этой статье разбираются три задачи заключительного тура XI Всесоюзной математической олимпиады, которые не вошли в «Задачник «Кванта». Решения задач, опубликованных в «Задачнике «Кванта», появятся в соответствующих номерах журнала в следующем году. (Условия задач см. на с. 58—61.)

8 класс. Задача 4.

Вместо того чтобы у б и р а т ь фишки, будем ставить их, начав с одной черной фишки. Добавим к ней белые фишки так, чтобы у каждой из них был черный сосед (одну или две). Затем поставим несколько черных фишек так, чтобы у каждой из них был белый сосед и чтобы у «старой» черной фишки белых соседей не было. Следующим ходом снова ставятся белые фишки с соблюдением этих двух условий и т. д.

Обозначим через b_i число черных фишек, выставленных после i ходов, а через w_i — число белых. Если на $i+1$-м ходу приставляются черные фишки (i четно), то $b_{i+1}=b_i+2w_i$, $w_{i+1}=w_i$. Если же — белые фишки (i нечетно), то $b_{i+1}=b_i$, $w_{i+1}=w_i+2b_i$; мы каждым ходом все фишки какого-нибудь одного цвета окружаем двумя фишками другого цвета. Ясно, что большего числа фишек приставить невозможно.

Условимся записывать положение фишек на окружности после i-го хода в виде вектора $\langle b_i; w_i \rangle$ и вычислим несколько первых векторов:

$$\langle 1;0\rangle\to\langle 1;2\rangle\to\langle 5;2\rangle\to\langle 5;12\rangle\to\langle 29;12\rangle\to\langle 29;70\rangle\to\langle 169;70\rangle\to\langle 169;408\rangle\to\langle 985;408\rangle.$$

Убедимся теперь, что в задаче а) ответ положительный, а в задаче б) наименьшее число ходов — восемь.

Действительно, после четвертого хода будет выставлено $29+12=41$ фишек. При переходе от $\langle 5;12\rangle$ к $\langle 29,12\rangle$ добавляются 24 фишки. Из них не больше $2\times 5=10$ отвечают за выполнение второго условия — отделяют старые черные фишки от белых. Назовем эти фишки *обязательными*. Пометим их

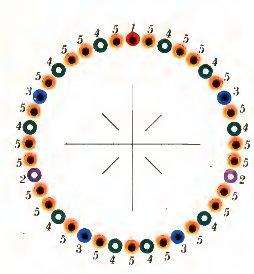


Рис. 1.

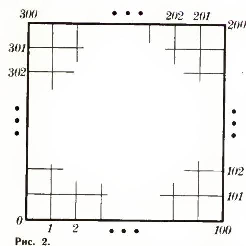


Рис. 2.

среди 24 добавленных и уберем любую не помеченную. Получим набор из 40 фишек, удовлетворяющий условиям задачи (на рисунке 1 показан один такой набор).

Аналогично следует действовать и в задаче б). Семи ходов недостаточно, поскольку $169+408<1000$. При переходе от $\langle 169, 408\rangle$ к $\langle 985, 408\rangle$ добавлено не больше $169\times 2=378$ обязательных фишек, и не меньше $816-378=438$ фишек можно убрать. Нам же нужно убрать $985+408-1000=393$ фишки.

9 класс. Задача 2.

Чтобы решить эту задачу, нужно воспользоваться определением *предела последовательности*. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$, для любого положительного ε найдется такое m, что для всякого $n>m$

$$\frac{1}{2}a_n-\varepsilon<a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n+\varepsilon.$$

Докажем индукцией по i такое неравенство:

$$\frac{1}{2^i}a_n-2\varepsilon<a_{n+i}<\frac{1}{2^i}a_n+2\varepsilon,$$

где n — любое число, большее m. Действительно,

$$\frac{1}{2^{i+1}}a_n-2\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^i}a_n-2\varepsilon\right)-$$

$$-\varepsilon<\frac{1}{2}a_{n+i}-\varepsilon<a_{n+i+1}<$$

$$<\frac{1}{2}a_{n+i}+\varepsilon<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^i}a_n+2\varepsilon\right)+\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{2^{i+1}}a_n+2\varepsilon.$$

Но для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое i, что $\left|\frac{a_n}{2^i}\right|<\varepsilon$. Из этого следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ можно указать такое k, что для всех $l>k$ выполняется неравенство $-3\varepsilon<a_l<3\varepsilon$. По определению предела это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

9 класс. Задача 5.

Будем считать, что на границе квадрата свободных узлов нет. Докажем, что любая система ломаных, удовлетворяющих условиям задачи и этому условию, проходит через четное число узлов.

Занумеруем узлы на границе квадрата так, как это показано на рисунке 2. Легко сообразить, что ломаная, соединяющая точки с номерами i и j, проходит через $1+i-j+2l$ узлов, где значение l зависит от ломаной. Подсчитаем теперь удвоенное число узлов, через которое проходят наши ломаные. Поскольку из каждой точки границы квадрата, кроме вершин, выходит ломаная, это число равно $4\cdot 99+\Sigma i-\Sigma j+2\Sigma l\,(i,j)$, где $l(i,j)$ — значение l для ломаной с началом в точке i и концом в точке j. Легко заметить, что $\Sigma l(i,j)$ четна, поскольку каждое слагаемое встречается в ней дважды: $l(i,j)=l(j,i)$. Следовательно, наша система ломаных проходит через четное число узлов, а всего узлов, не лежащих на границе нашего листа, 99^2 — нечетное число. Таким образом, действительно останется непройденным хотя бы один узел.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

Заключительный этап XI Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 14 по 19 апреля этого года в городе Фрунзе. Участниками этого этапа, как всегда, были победители республиканских олимпиад, зональных олимпиад, проходивших в РСФСР, олимпиад городов Москва и Ленинград и победители X Всесоюзной олимпиады, получившие Дипломы I и II степени. Всего во Фрунзе приехали 136 человек: 50 десятиклассников, 47 девятиклассников, 39 восьмиклассников.

Открытие заключительного этапа олимпиады состоялось 14 апреля. С приветственными словами и пожеланиями успехов к участникам обратились заместитель министра народного образования Киргизской ССР З. Д. Джантакова, председатель жюри олимпиады по физике профессор Киргизского государственного университета Л. В. Тузов и др.

15 апреля начался первый — теоретический — тур. Как всегда, он проходил по классам. Восьмиклассникам были предложены 4 задачи, девятиклассникам — 5 задач, десятиклассникам — 5 задач. В подготовке и составлении этих задач принимали участие преподаватели различных физических вузов страны и преподаватели школ: Л. Г. Асламазов, Л. П. Баканина, В. Е. Белонучкин, Ю. М. Брук, Е. И. Бутиков, Н. И. Гольдфарб, М. В. Грабиленков, А. Р. Зильберман, О. Ф. Кабардин, С. М. Козел, А. С. Кондратьев, С. С. Кротов, З. В. Оганесова, В. А. Орлов, Е. Л. Рамишевский, Н. А. Родина, О. Я. Савченко, В. Е. Скороваров, И. Ш. Слободецкий, А. Л. Стасенко, Е. Л. Сурков, В. Г. Харитонов и др.

Ниже мы приводим полные тексты задач теоретического тура заключительного этапа XI Всесоюзной олимпиады (все эти задачи вошли в «Задачник «Кванта» (см. «Квант», 1977, №№ 7, 8, 9)).

8 класс

1. Действующая модель подъемного крана способна поднять 10 бетонных плит без обрыва троса. Сколько плит поднимет реальный кран, изготовленный из тех же материалов, если линейные размеры крана, троса и плит в 12 раз больше, чем в модели?

2. Две льдины движутся поступательно с одинаковыми по абсолютному значению скоростями: одна — на север, другая — на запад. Оказалось, что в любой момент времени на обеих льдинах можно так расположить часы, что скорости концов секундных стрелок относительно Земли будут равными, причем для каждого момента времени такое расположение единственно. Определить, на какое расстояние перемещаются льдины за сутки, если длина каждой секундной стрелки равна 1 см. Циферблаты часов расположены горизонтально.

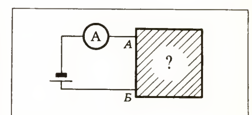


Рис. 1.

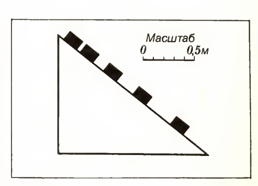


Рис. 2.

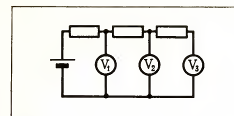


Рис. 3.

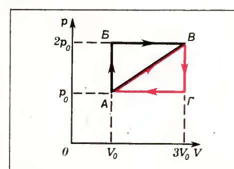


Рис. 4.

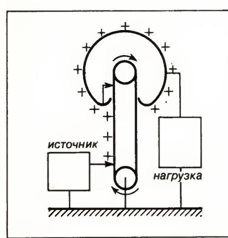


Рис. 5.

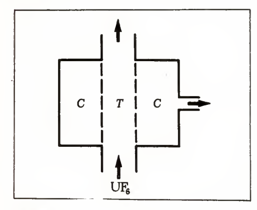


Рис. 6.

3. При подключении гальванического элемента напряжением 1,5 В к зажимам A и $Б$ амперметр показал ток 1 А (рис. 1). Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток упал в 2 раза. Какая электрическая цепь находится внутри коробки?

4. Рисунок 2 сделан со стробоскопической фотографии кубика, движущегося вдоль наклонной плоскости. Промежутки времени между последовательными вспышками лампы равны 0,1 с. Определить коэффициент трения кубика о плоскость.

9 класс

1. Цепь, показанная на рисунке 3, собрана из одинаковых резисторов и одинаковых вольтметров. Первый вольтметр показывает $U_1 = 10$ В, а третий — $U_3 = 8$ В. Каково показание второго вольтметра?

2. На рисунке 4 изображены два замкнутых цикла: $АБВА$ и $АВГА$. Оба цикла проведены с идеальным одноатомным газом. 1) Указать, на каких участках циклов газ получает и на каких участках отдает тепло. 2) У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?

3. В высоковольтном электростатическом генераторе заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод радиуса $R = 1,5$ м (рис. 5). Оценить максимальные значения

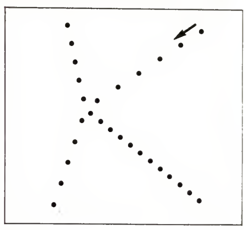


Рис. 7.

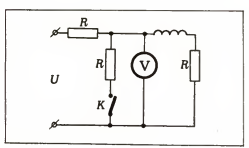


Рис. 8.

напряжения и тока, которые можно получить от такого генератора, если скорость ленты $v=20$ м/с, а ее ширина $l=1$ м. Пробой в воздухе возникает при напряженности электростатического поля $|\vec{E}_0|=30$ кВ/см.

4. Природный уран состоит из смеси двух изотопов с относительными атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций 7:1000. Для увеличения концентрации ^{235}U, который применяется в атомных реакторах, используется истечение газообразного соединения UF_6 (шестифтористый уран) в вакуум через маленькие отверстия. Газ пропускается через трубу T с пористыми стенками (рис. 6). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C. Найти отношение концентраций $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ в откачиваемом газе. Относительная атомная масса фтора равна 19.

• 5. Рисунок 7 сделан со стробоскопической фотографии движения двух сталкивающихся шариков одинаковых диаметров, но разных масс. Стрелкой на рисунке показано направление движения одного из шариков до столкновения. 1) Определить отношение масс шариков. 2) Указать, в каком направлении двигался до столкновения второй шарик.

10 класс

1. Нарисовать примерный график зависимости от времени показаний вольтметра (рис. 8) после размыкания ключа K. Вольтметр и катушка индуктивности идеальные; $R=100$ Ом, $U=300$ В.

2. Луна одновременно фотографируется с одной и той же стороны с Земли и со спутника Луны. Орбита спутника круговая. Диаметр изображения Луны на фотографии, полученной на Земле, равен 4,5 мм, а на спутнике Луны — 250 мм. Найти период обращения спутника Луны по его орбите, если оба снимка сделаны с помощью одинаковых объективов с фокусным расстоянием 500 мм. Принять, что ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле, и расстояние от Земли до Луны равно 380 000 км.

3. Теплоизолированная полость небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий (рис. 9). Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным p, а температуры поддерживаются равными T в одном из объемов и $2T$ в другом. Найти установившиеся давление и температуру внутри полости.

4. Рисунок 10 сделан с фотографии треков частиц в камере Вильсона. Распады ядер газа, наполняющего камеру Вильсона, вызваны в данном случае действием на них быстрых нейтронов. Камера Вильсона была заполнена смесью водорода (H_2), паров спирта (C_2H_5OH) и воды (H_2O) и помещена в магнитное поле с индукцией 1,3 Т. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно к плоскости рисунка. 1) Определить энергию протона, появившегося в точке A. Траектория

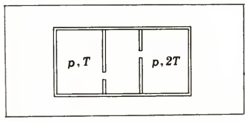


Рис. 9.

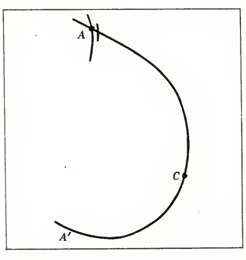


Рис. 10.

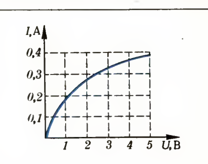


Рис. 11.

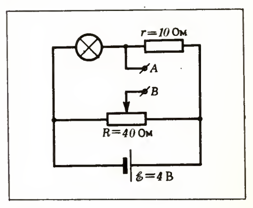


Рис. 12.



Победители XI Всесоюзной олимпиады школьников по физике, получившие Дипломы I степени. Внизу (слева направо): В. Решетов, В. Щукин, Д. Ковригин, К. Третьяченко, М. Цыпин; вверху (слева направо): Е. Зудин, А. Мирлин, С. Шпилькин, А. Ганопольский.

этого протона — кривая AA'. Почему меняется кривизна траектории протона? Определить энергию протона в точке C его траектории. Масса протона равна $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. 2) Определить, ядро какого элемента распалось в точке A, если треки частиц, начинающихся в этой точке, идентифицированы как следы двух протонов и двух α-частиц.

5. На рисунке 11 приведена вольтамперная характеристика лампочки от карманного фонаря. Лампочка включена в схему, показанную на рисунке 12. 1) Найти графически ток в лампочке. 2) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B равно нулю? 3) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B почти не будет меняться при небольших изменениях э. д. с. батареи? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

16 апреля все участники олимпиады приняли участие в Ленинском коммунистическом субботнике. Жюри олимпиады в этот день проверяло работы теоретического тура. Успешно справились с задачами многие участники. Наивысший балл, который давался за безукоризненно правильное решение задачи, был 1. Однако некоторые школьники привели такие оригинальные решения, что жюри присудило им дополнительно еще 0,25 балла. Это были *Л. Богданов* (Ленинград), *А. Забродин* (Московская обл.), *О. Лищенко* (Киев), *А. Моржаков* (Кемеровская обл.), *А. Морозов* (Москва), *А. Москалев* (Токмак), *И. Мошков* (Ленинград), *А. Потапов* (Московская обл.), *А. Шафаренко* (Караганда), *В. Щукин* (Ленинград), *О. Ющук* (Киев).

17 апреля проходил экспериментальный тур. Задачи этого тура и оборудование для его проведения подготовили сотрудники физического факультета Киргизского государственного университета. Подробный разбор этих задач вы найдете в помещенной в этом номере статье П. Дика — ответственного секретаря жюри XI Всесоюзной олимпиады по физике.

Наиболее успешно выполнили задание экспериментального тура *В. Бекташев* (Новосибирск), *Л. Богданов* (Ленинград), *А. Ганопольский* (Минск), *А. Дик* (Фрунзенская обл.), *Д. Ковригин* (Ленинградская обл.), *Т. Круузе* (Тарту), *А. Морозов* (Москва), *В. Решетов* (Московская обл.), *А. Сухинин* (Приморский кр.), *К. Третьяченко* (Киев), *С. Шпилькин* (Московская обл.), *А. Юргенсон* (Омск), *О. Ющук* (Киев).

18 апреля жюри олимпиады после тщательного анализа теоретических и экспериментальных работ участников определило лучших из них.

19 апреля на закрытии XI Всесоюзной олимпиады школьников по

физике было объявлено решение жюри. Имена победителей, получивших Дипломы I, II и III степени, приведены на 73 странице этого номера. Многие участники олимпиады награждены различными грамотами и призами. Специальный приз — подшивку журнала «Квант» за 1976 год с автографом главного редактора журнала академика И. К. Кикоина — получил *Б. Барпиев* (восьмиклассник из села Успеновка КиргССР). Подпиской на журнал «Квант» на 1978 год награждены *А. Аболтыньш* (Рига), *Г. Ваякас* (Тарту), *И. Гусев* (Воркута), *В. Пивоваров* (Красноярск) и *В. Таурайтис* (Вильнюс).

Согласно постановлению Министерства просвещения СССР о проведении Всесоюзной олимпиады школьников, победители XI Всесоюзной олимпиады, награжденные Дипломами I и II степени, получили право участвовать в заключительном этапе XII Всесоюзной олимпиады.

Десятиклассники *А. Ганопольский*, *В. Решетов*, *К. Третьяченко*, *Р. Шарипов* и *В. Щукин* стали участниками X Международной физической олимпиады школьников, которая проходила в этом году в городе Градец Кралóве (Чехословакия). Об этой олимпиаде мы расскажем в одном из следующих номеров нашего журнала.



Жюри заседает.



Идет эксперимент.

П. Дик

Экспериментальные задачи олимпиады по физике

17 апреля в лабораториях физического факультета Киргизского государственного университета проходил экспериментальный тур заключительного этапа XI Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Каждому участнику олимпиады предлагалось решить две экспериментальные задачи. Расскажем об этих задачах и их решениях.

8 класс

Задача 1. *Определите плотность металла, находящегося в одном из двух кусков пластилина, если известно, что массы пластилина в обоих кусках одинаковы. Оцените точность полученного результата. Извлекать металл из пластилина не разрешается.*

Оборудование: 1) *весы с разновесами*, 2) *стакан с водой*, 3) *штатив*.

Пользуясь весами с разновесами, можно определить массу куска пластилина с металлом ($m_{пл}+m_{м}$), массу чистого пластилина ($m_{пл}$) и по их разности — массу металла ($m_{м}$), находящегося в одном из кусков пластилина. Взвесив данные куски пластилина сначала в воздухе, а потом в воде, можно найти выталкивающую силу и, зная плотность воды, можно вычислить объемы кусков ($V_{пл}+V_{м}$ и $V_{пл}$). Объем металла ($V_{м}$) можно определить по разности этих объемов. Тогда плотность металла

$$\rho_{м}=\frac{m_{м}}{V_{м}}.$$

Было два варианта: в одних кусках пластилина находился кусок алюминия, в других — кусок железа.

Весьма интересным было бы решение этой задачи, если бы вместо определенного куска чистого пластилина массой, равной массе пластилина в составном куске, давался просто пластилин (в неопределенном количестве). В этом случае для решения задачи надо было бы взять кусок чистого пластилина, масса которого равна массе (m) составного куска (объема V), и определить его объем (V_0). Плотность металла можно найти, ре-

шив следующую систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными ($\rho_м$, $\rho_{пл}$, $V_м$ и $V_{пл}$):

$$\begin{cases} m = \rho_{пл} V_{пл} + \rho_м V_м \\ V = V_{пл} + V_м \\ V_0 = V_{пл} + \dfrac{\rho_м}{\rho_{пл}} V_м \\ \rho_{пл} = \dfrac{m}{V_0}. \end{cases}$$

Задача 2. *С помощью двух динамометров и двух измерительных линеек определите возможную механическую схему и параметры составных элементов в коробочке (рис. 1), не вскрывая ее.*

Примечание. *Не разрешается изгибать выступающие проволочные концы и растягивать их с силой, превышающей предельные показания динамометра.*

Эту задачу с «черным ящиком» решили многие участники олимпиады. Внутри коробочки была механическая схема, состоящая из свободно перемещающегося рычажка, пружинки и четырех проволочных выводов с крючками на концах (рис. 2). Разгадать эту схему можно было, сравнивая поочередно смещения проволочных концов при неподвижном одном из них.

Пусть сначала остается неподвижным конец A, а конец D смещается, например, вправо на $\Delta x_D = 2$ см. При этом конец B смещается тоже вправо, но на величину $\Delta x_B = 3$ см, а конец C остается неподвижным. Если оставить неподвижным конец B, а конец D переместить на $\Delta x_D = 1$ см, то концы A и C переместятся в ту же сторону, но на $\Delta x_A = \Delta x_C = 3$ см. Если же оставить неподвижными сразу два конца: A и B (для чего между соответствующими крючками можно было зажать линейку), то концы D и C никуда не сместятся. Но если при этом к концу C прикладывать некоторую силу, то смещение этого конца будет пропорционально действующей силе.

На основании проведенных опытов нетрудно сделать вывод, что концы A, B и D прикреплены к рычажку непосредственно, а конец C — через пружинку. Конкретные измерения дают возможность определить соотношение плеч рычажка, жесткость пружинки и ее предельно допустимое растяжение.

9 класс

Задача 1. *Определить объем воздуха, удаляемого насосом Комовского за один цикл, и атмосферное давление.*

Оборудование: *1) насос Комовского, 2) вакуумная тарелка с колпаком, 3) манометр, 4) линейка, 5) математические таблицы.*

С помощью линейки можно измерить внутренний диаметр и среднюю высоту колпака и определить объем V_0 воздуха под колпаком.

Обозначим атмосферное давление через p_0, давление под колпаком после первого оборота рукоятки насоса через p_1, объем удаленного за один оборот воздуха через ΔV. Тогда при медленном вращении рукоятки (когда температура воздуха не меняется) выполняется такое соотношение:

$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + \Delta V).$$

После второго оборота можно записать аналогичное равенство:

$$p_1 V_0 = p_2 (V_0 + \Delta V).$$

В принципе из этих двух уравнений можно найти атмосферное давление p_0 и объем ΔV удаленного за один оборот воздуха. Однако практически неудобно измерять давления воздуха после каждого оборота (p_1 очень незначительно отличается от p_2). Лучше измерить давления после известных k и n оборотов и составить соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p_0 V_0^k = p_k (V_0 + \Delta V)^k \\ p_0 V_0^n = p_n (V_0 + \Delta V)^n. \end{cases}$$

Отсюда

$$V_0^{n-k} = \frac{p_n}{p_k} (V_0 + \Delta V)^{n-k}.$$

Прологарифмировав это уравнение, можно найти ΔV, а затем и p_0.

Задача 2. Второй задачей для девятиклассников, как и для восьмиклассников, была задача с «черным ящиком». Только в этом случае схема внутри была несколько иной (рис. 3), причем концы B и D были прикреплены к рычажку шарнирно.

10 класс

Задача 1. *Определите, как можно точнее, показатель преломления жидкости.*

Оборудование: *1) колба с исследуемой жидкостью, 2) стеклянная кювета,*

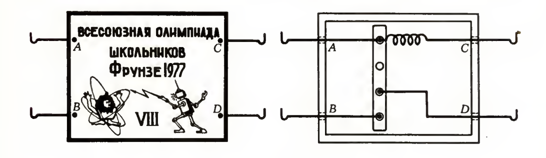


Рис. 1.

Рис. 2.

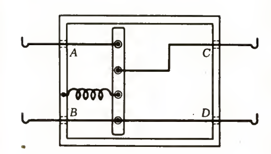


Рис. 3.

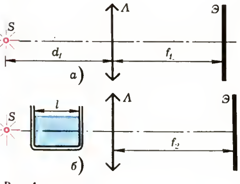


Рис. 4.

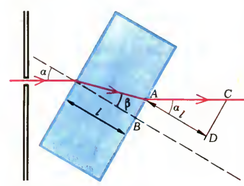


Рис. 5.

3) линза, 4) экран, 5) лампочка, 6) батарейка, 7) полоска миллиметровой бумаги.

Эту задачу можно решать разными способами. Рассмотрим два из них.

а) Собрав соответствующую установку (рис. 4, *а*) и получив четкое изображение нити лампочки на экране, можно определить фокусное расстояние линзы:

$$F = \frac{d_1 f_1}{d_1 + f_1},$$

где d_1— расстояние от лампочки до линзы, а f_1— расстояние от линзы до экрана.

Затем, поместив между лампочкой и линзой кювету с исследуемой жидкостью (рис. 4, *б*), надо снова добиться четкого изображения нити лампочки на экране. Считая кювету с жидкостью плоскопараллельной пластинкой, расстояние d_2 от лампочки до линзы можно записать так:

$$d_2 = (d_1 - l) + \frac{l}{n},$$

где l — ширина кюветы, а n — искомый показатель преломления жидкости. Тогда из формулы линзы

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}$$

(f_2— новое расстояние от линзы до экрана) можно найти показатель преломления n.

б) Можно определить показатель преломления, собрав схему, показанную на рисунке 5. Луч света, прошедший через узкую щель в экране, падает под малым углом α на плоскопараллельную пластинку (кювету с исследуемой жидкостью) и преломляется соответствующим образом. Измерив $|AB|$ и $|CD|$, можно найти показатель преломления n:

$$n = \frac{|CD|}{|AB|}.$$

Задача 2. *Определите максимально возможное число параметров жидкости, используя следующее оборудование: 1) колба с жидкостью, 2) химический стакан, 3) батарейка, 4) амперметр, 5) вольтметр, 6) динамометр, 7) колодка с электродами, 8) выключатель, 9) резиновый жгутик, 10) линейка, 11) кусок проволоки, 12) груз.*

С помощью указанного оборудования можно определить плотность, коэффициент поверхностного натяжения и удельное сопротивление исследуемой жидкости. Для определения плотности понадобятся грузик и динамометр. Коэффициент поверхностного натяжения можно измерить, используя проволочный каркас и резиновый жгутик. Жесткость последнего легко найти с помощью динамометра и линейки. Остальное оборудование позволяет определить удельное сопротивление данного раствора.

В заключение хотелось бы отметить, что многие участники XI Всесоюзной олимпиады по физике при выполнении экспериментальных работ продемонстрировали хорошие умения и навыки, а некоторые даже проявили изобретательность и смекалку.

Победители XI Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Захаревич И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Ляховец А. (г. Краснодар, с. ш. № 47),
Хлебутин С. (Пермь, с. ш. № 6),
Шахбозян Г. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 9 классам —

Бугаенко В. (Киев, ФМШ № 145),
Гальперин В. (Москва, с. ш. № 57),
Книжник В. (Москва, с. ш. № 2),
Лисничук Л. (УССР, Васильевский р-н, с. ш. № 8),
Нейман В. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 10 классам —

Гандельсман Л. (Ленинград, с. ш. № 30),
Рыбников Г. (Москва, с. ш. № 42),
Флаасс Д. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Чурбанов А. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Бернотас А. (Вильнюс, с. ш. № 2),
Буякевич А. (Родинское, с. ш. № 8),
Власов В. (Киев, ФМШ № 145),
Ирматов А. (Наманган, с. ш. № 7),
Канепо Я. (Лиелвардеская с. ш.),
Лиманаускас В. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Новосельцева Т. (Москва, с. ш. № 7),
Рутковский И. (Киев, ФМШ № 145),
Сарчинелия А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Суворова Н. (Владивосток, с. ш. № 23),
Ясонов И. (Казань, с. ш. № 131);

по 9 классам —

Беспалов А. (Симферополь, с. ш. № 40),
Оревков С. (Москва, с. ш. № 57),
Остров Г. (Барановичи, с. ш. № 16),
Фолин А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Якубович Д. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 10 классам —

Амброладзе А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Аузиньш А. (Рига, с. ш. № 1),
Виннштаин Я. (Киев, ФМШ № 145),
Димов А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Кодрян А. (Рыбинца, школа-интернат),
Фоменко М. (Дальнегорск, с. ш. № 4),
Эйдельман З. (Минск, с. ш. № 10),
Энтин Л. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Волков А. (Оренбург, с. ш. № 2),
Мустяце И. (Кишинев, с. ш. № 1),
Перетрухан В. (Волгоград, с. ш. № 3),
Подругина В. (Ангарск, с. ш. № 10),
Свадеба С. (Ровно, с. ш. № 15),
Убайдуллаев Р. (Ташкент, с. ш. № 5);

по 9 классам —

Алексеев А. (Пермь, с. ш. № 11),
Арафаилов С. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Вялый М. (Енакиево, с. ш. № 37),
Жердев А. (Славянск, с. ш. № 5),
Лысенок И. (Нарочанская с. ш.),
Саблин А. (Москва, ФМШ № 18),
Шейдвассер О. (Оренбург, с. ш. № 2),
Шишкин С. (Ленинград, ФМШ № 45),
Шулембаев Д. (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —

Арбузов Л. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Бушмелев А. (Ижевск, с. ш. № 30),
Воронович И. (Гродненский р-н, Сопоцкинская с. ш.),
Касянчук А. (Николаев, с. ш. № 22),
Мошонкин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Ослон В. (Киев, с. ш. № 173),
Петухов А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Сиденко С. (Александровская с. ш. Одесской обл.),
Фолиадова Е. (Ульяновск, с. ш. № 1).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Зудин Е. (Александров Владимирской обл., с. ш. № 4),
Мирлин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Цыпин М. (Москва, с. ш. № 2),
Шпилькин С. (п. Менделеево Московской обл., с. ш. № 2);

по 9 классам —

Ковригин Д. (Ломоносов, с. ш. № 1);

по 10 классам —

Ганопольский А. (Москва, с. ш. № 88),
Решетов В. (Москва, ФМШ № 18),
Третьяченко К. (Киев, ФМШ № 145),
Щукин В. (Ленинград, ФМШ № 45).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Васильев А. (Чебоксары, с. ш. № 2),
Кленин К. (Саратов, с. ш. № 13),
Сухинин А. (п. Барабаш Приморского края),
Ющук О. (Киев, ФМШ № 145);

по 9 классам —

Бикташев В. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Дик А. (с. Лебединовка КиргССР, с. ш. № 1),
Забродин А. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Мичинский С. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Морозов А. (Москва, с. ш. № 179);

по 10 классам —

Богданов Л. (Ленинград, ФМШ № 45),
Григорьев Ю. (Чебоксары, с. ш. № 2),
Кондрашкин И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Моржаков А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Москалев А. (Токмак, с. ш. № 1),
Мухарский Ю. (Киев, ФМШ № 145),
Потапов А. (с. Б. Вяземы Московской обл.),
Шарипов Р. (Каракуль Бухарской обл., с. ш. № 18),
Юргенсов А. (Омск, с. ш. № 64).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Бараз Л. (Свердловск, с. ш. № 9),
Добриневский С. (Минск, с. ш. № 138),
Круузе Т. (Тарту, школа-интернат),
Мартиненас Л. (Вильнюс, с. ш. № 21),
Облаков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Радченко В. (Петрозаводск, Бесовецкая с. ш.),
Русаков Д. (Днепропетровск, с. ш. № 81);

по 9 классам —

Вайсбурд И. (Томск, с. ш. № 6),
Волков А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Макушок Ю. (Москва, с. ш. № 75),
Пикшрис Р. (Вильнюс, с. ш. № 22),
Пономарев Е. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Рылов С. (Москва, с. ш. № 2),
Ханелес А. (Самарканд, с. ш. № 67);

по 10 классам —

Грибов Б. (Воронеж, с. ш. № 66),
Дулатин С. (Сумгаит, с. ш. № 13),
Кулявцев А. (Саратов, с. ш. № 13),
Лищенко О. (Киев, ФМШ № 145),
Лобзин В. (Свердловск, с. ш. № 9),
Мидодашвили П. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Мошков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Налибодский Б. (Минск, с. ш. № 98),
Яненко Е. (Киев, ФМШ № 145).



М. Башмаков

Ленинградская олимпиада средних профтехучилищ

Подготовка квалифицированного пополнения рабочего класса привела к созданию учебного заведения нового типа — среднего профессионально-технического училища (ПТУ). Особенно большое развитие средние ПТУ получили в г. Ленинграде, где сейчас в ПТУ учится ребят больше, чем в старших классах средних школ. Вместе с рабочей специальностью учащиеся ПТУ за три года получают полноценное среднее образование. Перед ними открыты все пути. Многие выпускники ПТУ продолжают свое образование на вечерних и дневных отделениях вузов.

Среди учащихся ПТУ много таких, которые любят математику и физику. Для них созданы кружки и юношеские школы, читаются лекции, проводятся олимпиады. Большую помощь ПТУ оказывает Ленинградский университет. Буквально все преподаватели и студенты математико-механического факультета ЛГУ — инициаторы оказания шефской помощи ПТУ — участвуют в этом плодотворном деле. При активном содействии деканата оборудованы счетными машинами учебные кабинеты ПТУ-24. Профессора факультета читают лекции будущим токарям и слесарям, руководят математическими и астрономическими кружками.

При активном содействии факультета в этом году была проведена третья физико-математическая олимпиада учащихся ПТУ г. Ленинграда и области. В ней приняло участие около 75 тысяч учащихся из 136 ПТУ. В заключительном туре, который прошел в стенах Ленинградского университета, участвовало около 900 человек. Среди победителей олимпиады — будущие слесари и токари, строители и шоферы. Жюри олимпиады, в которое вошли профессора, преподаватели и студенты университета, с радостью отметило интерес к математике и физике, который проявили участники олимпиады. Из победителей олимпиады впервые была составлена команда в составе 3-х человек, которая приняла участие в заключительном туре XI Всесоюзной олимпиады школьников по математике. Команда учащихся ПТУ привезла с этой олимпиады Похвальные отзывы первой и второй степени.

К сожалению, олимпиады учащихся ПТУ проводятся пока только в Ленинграде. Было бы чрезвычайно полезно, чтобы проведение олимпиад учащихся ПТУ стало такой же традицией, как проведение Всесоюзных олимпиад школьников.

Ниже мы приводим тексты задач по математике Ленинградской олимпиады средних профтехучилищ.

I курс

1. Сколько действительных корней имеет уравнение
$$x^3 - 3x = \sqrt{5}\ ?$$

2. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Через всякую ли точку пространства можно провести прямую, пересекающую прямые a и b?

3. Через точку M с координатами (0; 1) проведена прямая, пересекающая параболу $y = x^2$ в точках A и B. Доказать, что произведение расстояний от точек A и B до оси ординат равно единице.

4. Дано 25 чисел. Сумма любых четырех из них положительна. Доказать, что сумма всех чисел положительна.

II курс

1. Найти область значений функции
$$y = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

2. В треугольной пирамиде $ABCD$ отмечены точки: K — середина AD, M — середина AC, P — середина BD, T — середина BC. Проведены плоскости APT и BKM, которые рассекли пирамиду на четыре части. Найти объем той из этих частей, которая примыкает к ребру AB, если объем всей пирамиды равен V.

3. Доказать, что четыре точки пересечения парабол
$$y = x^2 + x - 40,$$
$$x = y^2 + y - 41$$
лежат на одной окружности.

4. Дано 51 число. Произведение всех этих чисел, а также произведение любых четырех из них, положительно. Доказать, что каждое число положительно.

III курс

1. Найти наименьшее значение функции
$$y = \sin^{100} x + \cos^{100} x.$$

2. Даны две скрещивающиеся прямые. Какое множество образуют середины всех отрезков, концы которых лежат на данных прямых?

3. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$. Доказать, что хотя бы одно из трех чисел $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ по модулю не меньше половины.

4. Несколько городов попарно соединены дорогами. Из каждого города вышло по одному путнику, направившемуся в самый ближайший для него город. Доказать, что если число городов нечетно, то в какой-то из них никто не придет. (Считать, что расстояния между городами попарно различны.)

Н. Васильев

Задачи республиканских олимпиад

Мы думаем, что многим нашим читателям будет интересно узнать, какие задачи предлагались прошлой весной на различных олимпиадах. Некоторые задачи из числа предлагавшихся на областных, городских и республиканских олимпиадах включены в «Задачник «Кванта» по математике (М436, М441, М442, М446, М462, М464, М466—М469 и др.). Ниже мы публикуем еще 20 задач республиканских олимпиад.

Мы указываем фамилии авторов некоторых задач (как правило, авторы этих задач присылают их в редакцию журнала).

1. 10 векторов таковы, что длина суммы любых 9 из них меньше длины суммы всех 10 векторов. Доказать, что существует ось, на которую каждый из 10 векторов дает положительную проекцию. (*Ю. Ионин*)

2. Произведение двух натуральных чисел — трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами, а сумма — двузначное число, записываемое одинаковыми цифрами. Найти все такие пары чисел. (*А. Савин*)

3. Вершины выпуклого четырехугольника лежат на различных сторонах квадрата 1×1. Доказать, что периметр четырехугольника не меньше $2\sqrt{2}$.

4. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. В области, ограниченной отрезками AB, AC и (меньшей) дугой BC, расположен отрезок. Доказать, что его длина не больше $|AB|$.

5. Даны n вещественных чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что модуль хотя бы одного из чисел

$$x_1+\ldots+x_k-x_{k+1}-\ldots-x_n$$

(где $k=1,2,\ldots,n$; при $k=n$ получаем просто сумму всех n чисел $x_1,\ldots,x_n$) не превосходит наибольшего из модулей x_k. (*А. Плоткин*)

6. Конечно или бесконечно множество решений уравнения $x^2+y^3=z^2$ в целых числах?

7. Найти, какими тремя цифрами надо заменить буквы в слове МЯУ, чтобы равенство

$$\underbrace{\text{МЯЯ}\ldots\text{ЯУ}}_{n}:\text{МУ}=\underbrace{\text{ЯММ}\ldots\text{МУ}}_{n}\ \text{ЯУ}$$

выполнялось при любом n. (*М. Штеренберг*)

8. Доказать, что если $x^{1977}+y^{1977}>x^{1976}+y^{1976}$, то $x^{1978}+y^{1978}>x^{1977}+y^{1977}$. (*С. Конягин*)

9. При каком n квадрат можно разрезать на n конгруэнтных между собой многоугольников?

10. Может ли при некотором натуральном n число n^2+2^n оканчиваться цифрой 5? (*В. Федоров*)

11. Доказать, что при целом n и любом x выполнено неравенство $|\sin nx|\leqslant|n\sin x|$.

12. Пусть $x_0=1000$ и для каждого n

$$x_n=\sqrt{x_{n-1}+30}.$$

Существует ли предел последовательности x_n? Если да, то чему он равен?

13. Точки K и H, лежащие соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, таковы, что $|AK|=|HC|$, $|AH|=|KB|$. Доказать, что площадь четырехугольника $BKHC$ по крайней мере втрое больше площади треугольника AKH.

14. Найти все натуральные n, для которых 9^n+10^n больше 12^n. (*В. Федотов*)

15. Доказать, что при $n>4$ не существует множества из n точек таких, что для каждых трех точек из этого множества найдется четвертая точка из этого множества, образующая с этими тремя четверку вершин параллелограмма. (*Д. Григорьев*)

16. Двое играющих по очереди выписывают цифры в строчку в 12 идущих подряд клеток. Может ли второй добиться того, чтобы полученное в итоге число из 12 цифр делилось на 77? (Разрешается вписывать в любую клетку любую цифру, в том числе и 0.)

17. 100-значное число равно сумме своих цифр, плюс сумма попарных произведений своих цифр, плюс сумма произведений по три цифры, плюс и т. д., плюс произведение всех 100 цифр. Найти все такие 100-значные числа. (*А. Савин*)

18. В четырехугольнике длина каждой стороны — целое число, являющееся делителем периметра. Доказать, что в этом четырехугольнике хотя бы две стороны конгруэнтны.

19. Дана полуокружность с центром O. Из каждой точки M, лежащей на продолжении диаметра, соединяющего концы полуокружности, проводится луч, касающийся этой полуокружности, и на нем откладывается отрезок MX, конгруэнтный отрезку MO. Найти множество точек X. (*С. Алейнов*)

20. Проекция плоской фигуры на любую прямую имеет длину меньше 1 см. Верно ли, что эту фигуру можно поместить в окружность радиуса а) 1 см? б) 1,5 см? (*А. Слинько*)

Каппа

Кривая, называемая *Каппой* (см. третью страницу обложки) обладает центром симметрии O и двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Есть у каппы и две горизонтальные асимптоты. Прямая, проведенная в плоскости каппы, пересекает ее, самое большее, в четырех точках.

Идея построения Слюза, первооткрывателя каппы, состоит в следующем. Рассмотрим (рис. 1) конгруэнтные окружности, центры которых лежат на прямой l, не содержащие точку O внутри. К каждой такой окружности из точки O проводим пару касательных. Множество $\{M\}$ этих точек касания и представляет собой каппу. Этот способ, по существу, эквивалентен способу И. Ньютона (роль радиусов конгруэнтных окружностей исполняет у Ньютона катет угольника MB).

Способ И. Ньютона имеет, однако, то преимущество, что с его помощью можно графически построить касательную к каппе в любой ее точке. Для этого достаточно построить *нормаль* (перпендикуляр к касательной). Покажем, как это сделать.

Движение угольника *в каждый момент времени* можно представить как вращение около некоторой точки N. Как найти положение этой точки для произвольного момента времени? Точки B и O угольника (рис. 2) вместе с другими его точками вращаются относительно N, и нам известны направления скоростей в этих точках (B движется по l, а O — по AM). Следовательно, N находится в пересечении прямых, перпендикулярных AM и l. Тогда MN — нормаль к каппе в точке M.

С помощью рисунка 3 легко вывести полярное уравнение каппы $\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$ (a — величина радиуса конгруэнтных окружностей).

Покажем способ построения каппы, принадлежащий И. Барроу. Проведем из точки O «вертикальный» луч; через точку A на нем проведем прямую m, перпендикулярную OA (рис. 4). Рассмотрим произвольный луч OA_1, пересекающийся с m. Отложим на OA_1 отрезок $OM_1 \cong AA_1$. Множество $\{M\}$ таких точек образует две верхние ветви каппы. (В том, что это действительно каппа, вам поможет убедиться ее полярное уравнение.)

Еще один способ построения каппы, принадлежащий И. Бернулли, приведем без чертежа. Проведем окружность $(L, |LO|)$ с центром $L \in l$. Отложим на этой окружности две конгруэнтные дуги $OP < \frac{\pi}{2}$ и PQ. Соединим точки O и Q хордой. В пересечении этой хорды или ее продолжения с прямой, проходящей через точку P параллельно l, получаем точку M. Множество таких точек $\{M\}$ для всевозможных положений точки P также представляет собой две ветви каппы. Докажите это.

В. Березин

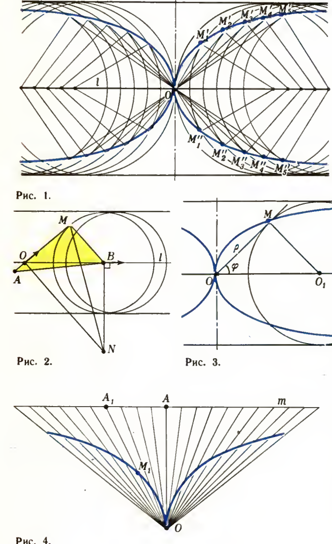


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.



В. Грушин, А. Диденко,
Г. Дубровский

Задачи на законы динамики материальной точки

Основу динамики материальной точки составляют три закона Ньютона. Они позволяют выбрать наиболее удобную для описания движения систему отсчета, связывают ускорение тела с действующими на это тело силами и устанавливают некоторые важные закономерности взаимодействия тел. Напомним эти законы.

Первый закон Ньютона: *существуют такие системы отсчета, относительно которых движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела или действия других тел компенсируются**).

Эти системы отсчета называются *инерциальными*. Существуют и такие системы отсчета, в которых утверждение, высказанное в первом законе Ньютона, не выполняется. Подобные системы отсчета называются *неинерциальными*.

После того как сделан выбор какой-либо инерциальной системы отсчета, можно приступить к изучению и описанию взаимодействия тел и характера их движения.

Многочисленные эксперименты показали, что единственной причиной изменения скорости данного тела в инерциальных системах отсчета является взаимодействие его с другими телами (или с полем), то есть действие на тело силы.

Второй закон Ньютона выражает связь между силой и ускорением тела, которое сообщается этой силой — *сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение*:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Второй закон Ньютона можно сформулировать и иначе — *изменение импульса тела равно импульсу силы, действующей на это тело*:

$$\Delta(m\vec{v}) = \vec{F}\Delta t \qquad (2)$$

(здесь $\Delta(m\vec{v})$ — изменение импульса тела за промежуток времени Δt).

Заметим, что соотношение (2) допускает изменение импульса как за счет изменения скорости, так и за счет изменения массы тела*).

Третий закон Ньютона гласит, что *тела действуют друг на друга с силами, направленными вдоль одной и той же прямой, равными по абсолютной величине и противоположными по направлению*.

Например, при столкновении двух тел (рис. 1) возникают две силы упругости, связанные соотношением:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \qquad (3)$$

где $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на первое тело со стороны второго, и $\vec{F}_{21}$ — сила, с которой первое тело действует на второе. Силы всегда появляются парами.

Довольно часто абитуриенты дают неправильный ответ на вопрос: находятся ли тела системы, изображен-

*) Обратите внимание на то, что в законах Ньютона не затрагивается возможность вращательного движения тел, поэтому они применимы лишь для описания движения материальной точки или для поступательного движения протяженных тел.

*) Как известно, масса любого тела является функцией скорости движения: чем больше скорость, тем больше масса. Характер этой зависимости такой, что она заметно проявляет себя лишь при скоростях, соизмеримых со скоростью света. При таких скоростях движения формулу (1) применять нельзя. А вот формула (2) остается справедливой для любых скоростей. При малых скоростях движения обе формулы эквивалентны.

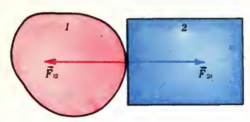


Рис. 1.

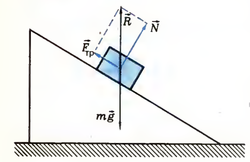


Рис. 2.

ной на рисунке 1, в равновесии? Причиной этого является, видимо, нечеткость чертежа: противоположно направленные силы кажутся приложенными к одной точке. Хотя на самом деле сила $\vec{F}_{12}$ приложена к телу *1*, а сила $\vec{F}_{21}$ — к телу *2*, так что на каждое тело действует лишь одна сила. Значит, ускорение каждого тела не равно нулю, и равновесия нет.

Решение задач по динамике нужно начинать с анализа сил, действующих на данное тело, причем необходимо четко представлять, действие какого другого тела характеризует каждая сила. Затем следует определить направление каждой силы, направления движения (скорости) и ускорения рассматриваемого тела.

Пусть, например, небольшое тело покоится на наклонной плоскости (рис. 2). Сколько сил действуют на него? Тело взаимодействует с Землей — это действие характеризуется силой тяжести $m\vec{g}$, направленной по вертикали вниз, — и с поверхностью наклонной плоскости — это действие характеризуется силой реакции $\vec{R}$. Так как тело находится в равновесии, векторная сумма сил должна быть равна нулю, поэтому сила $\vec{R}$ по абсолютной величине равна $|m\vec{g}|$, а направлена по вертикали вверх. Иногда действие поверхности наклонной плоскости на тело описывают двумя силами: силой упругости $\vec{N}$, направленной по нормали к поверхности (силой нормальной реакции), и силой трения $\vec{F}_{тр}$, направленной вдоль поверхности. Векторная сумма этих сил равна силе реакции опоры (см. рис. 2):

$$\vec{N} + \vec{F}_{тр} = \vec{R}.$$

Ключом к решению большинства задач динамики является второй закон Ньютона, который математически записывается в виде векторных уравнений (1) или (2). Однако в большинстве случаев оказывается более удобным записывать этот закон в проекциях на координатные оси. Например, векторное уравнение (1) в общем случае может быть заменено тремя скалярными, записанными в проекциях на три оси координат:

$$F_x = ma_x,\ F_y = ma_y,\ F_z = ma_z.$$

Заметим еще, что при анализе условия задачи необходимо ясно представлять смысл упрощающих предположений, содержащихся, как правило, в тексте задачи. Так, если рассматривается система тел, связанных нитью, то одним из таких дополнительных условий является обычно «невесомость» нити. Термин «невесомость» в этом случае не совсем корректен, точнее было бы сказать, что масса нити пренебрежимо мала. Что дает это упрощение? Оно позволяет считать, что натяжение нити во всех сечениях одинаково. Если бы нить обладала массой, то натяжение изменялось бы вдоль нити. Для примера разберем такую задачу.

Задача 1. *Однородный стержень длиной l и массой m движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$, приложенной к торцу стержня и направленной вдоль оси стержня (рис. 3). Определить натяжение стержня в сечении, отстоящем от этого торца стержня на расстояние l_0.*

Сила $\vec{F}$ является единственной горизонтальной силой, действующей на стержень. Под действием этой силы

стержень движется с ускорением $\vec{a}$, которое легко найти, используя второй закон Ньютона. Направим координатную ось X вдоль оси стержня в сторону движения стержня (см. рис. 3). В проекциях на эту ось второй закон Ньютона имеет вид:

$$F_x = ma_x,$$

или в данном случае

$$|\vec{F}| = m|\vec{a}|.$$

Мысленно отсечем от стержня переднюю часть длиной l_0. Оставшаяся часть имеет длину $l - l_0$ и массу $\frac{m}{l}(l - l_0)$ (так как стержень однороден). Эта часть стержня движется с тем же ускорением $\vec{a}$, что и весь стержень, под действием силы натяжения $\vec{T}$. Запишем для нее второй закон Ньютона в проекциях на ось X:

$$|\vec{T}| = \frac{m}{l}(l - l_0)|\vec{a}| = |\vec{F}|\left(1 - \frac{l_0}{l}\right).$$

Анализ полученного выражения показывает, что натяжение стержня линейно убывает от максимального значения $|\vec{F}|$ до нуля с увеличением расстояния l_0 от нуля до l (рис. 4).

Таким образом, ясно, что если речь будет идти о нити или тросе, масса которых не является пренебрежимо малой, то необходимо учитывать изменение натяжения при переходе от одного сечения к другому.

Рассмотрим теперь несколько задач, в которых требуется определить максимальное или минимальное значения некоторых физических величин.

З а д а ч а 2. *Груз массой m, подвешенный на нерастяжимой нити длиной l, отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают (рис. 5). Определить максимальное натяжение нити при движении груза.*

Найдем зависимость абсолютной величины силы натяжения $\vec{T}$ нити от угла α, образуемого нитью с вертикалью. На груз, кроме силы натяжения, действует еще сила тяжести $m\vec{g}$, направленная под углом α к нити.

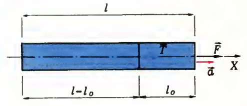


Рис. 3.

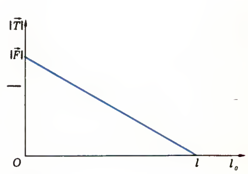


Рис. 4.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на неподвижную ось X, составляющую угол α с вертикалью, в тот момент, когда нить совпадает с этой осью:

$$|\vec{T}| - m|\vec{g}|\cos\alpha = ma_x.$$

Так как нить нерастяжима, груз движется по окружности радиуса l и a_x представляет собой центростремительное ускорение:

$$a_x = \frac{v^2}{l}.$$

Здесь v — линейная скорость груза, которая тоже зависит от угла α. Однако ее нетрудно найти, исходя из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = m|\vec{g}|h,$$

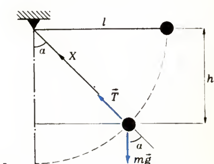


Рис. 5.

где $h = l \cos\alpha$.

Учитывая все записанные соотношения, получаем

$$|\vec{T}| = 3m|\vec{g}|\cos\alpha.$$

Максимальное значение силы натяжения соответствует условию $\cos\alpha = 1$ и составляет величину

$$|\vec{T}_{\max}| = 3m|\vec{g}|.$$

Это значение силы натяжения достигается при $\alpha = 0$, то есть в тот момент, когда нить вертикальна. Центростремительное ускорение груза при этом равно $2|\vec{g}|$ и направлено вертикально вверх.

Задача 3. *В условиях предыдущей задачи определить, какой угол с вертикалью образует нить в тот момент, когда проекция скорости груза на вертикальное направление наибольшая?*

В начальный момент, когда груз находится в положении *1*, его скорость равна нулю. Разумеется, равна нулю и проекция скорости на вертикальную ось Y (рис. 6). В положении *2* вертикальная проекция скорости опять равна нулю, так как скорость направлена горизонтально. Значит, при движении груза из положения *1* в положение *2* эта проекция сначала увеличивается, потом уменьшается, и где-то она максимальна. Найдем условие максимума вертикальной проекции скорости груза.

При движении груза его ускорение тоже непрерывно изменяется: в положении *1* оно равно $\vec{g}$ и направлено вертикально вниз, а в положении *2* ускорение по абсолютной величине равно $2|\vec{g}|$ и направлено вертикально вверх. Следовательно, в какой-то момент (в точке *3* на рисунке 6) вертикальная проекция ускорения обращается в нуль, при этом вертикальная проекция скорости принимает максимальное значение. Это и есть условие, которое позволяет найти ответ на вопрос задачи.

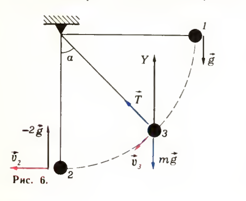


Рис. 6.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось Y для момента, когда тело находится в точке *3*:

$$|\vec{T}|\cos\alpha - m|\vec{g}| = 0,$$

где α — угол между нитью и вертикалью. Из решения предыдущей задачи

$$|\vec{T}| = 3m|\vec{g}|\cos\alpha.$$

Тогда получаем

$$3m|\vec{g}|\cos^2\alpha - m|\vec{g}| = 0, \quad (*)$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ и } \alpha \approx 54^\circ.$$

Можно получить ответ более коротким путем. Как известно, в точках экстремума функции ее производная обращается в нуль. Вертикальная проекция скорости в произвольном положении груза определяется соотношением

$$v_y = v\sin\alpha = \sqrt{2|\vec{g}|\,l\cos\alpha}\,\sin\alpha.$$

Найдем производную по α и приравняем ее нулю:

$$\sqrt{\frac{|\vec{g}|\,l}{2\cos\alpha}}\,(3\cos^2\alpha - 1) = 0.$$

Условие $3\cos^2\alpha - 1 = 0$ совпадает с условием максимума $(*)$, найденным выше.

Задача 4. *Тело массой m движется равномерно по горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$ (рис. 7). Коэффициент трения равен μ. При каком значении угла α сила $\vec{F}$ имеет наименьшую абсолютную величину?*

На тело действуют четыре силы: сила $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции поверхности $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Под действием этих сил тело движется равномерно и прямолинейно.

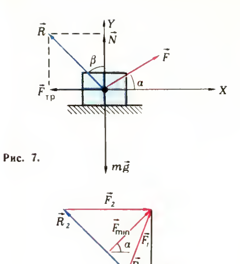




Рис. 7.

Рис. 8.

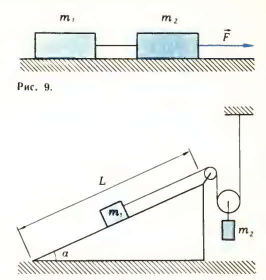
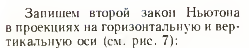


Рис. 9.

Рис. 10.



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси (см. рис. 7):

$$|\vec{F}| \cos \alpha - |\vec{F}|_{тр} = 0,$$

$$|\vec{N}| + |\vec{F}| \sin \alpha - m|\vec{g}| = 0.$$

Кроме того,

$$|\vec{F}_{тр}| = \mu |\vec{N}|.$$

Из этих трех уравнений находим

$$|\vec{F}| = \frac{\mu m|\vec{g}|}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Мы видим, что абсолютная величина силы $\vec{F}$ является функцией угла α. Чтобы найти экстремум этой функции, вычислим ее производную и приравняем нулю:

$$-\frac{\mu m|\vec{g}|(-\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu, \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg} \mu.$$

Задача может быть решена и другим способом. Заменим действия сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ действием одной силы — силы реакции опоры $\vec{R}$ (см. рис. 7). Так как тело движется равномерно, векторная сумма всех сил равна нулю, то есть силы $m\vec{g}$, $\vec{R}$ и $\vec{F}$ образуют замкнутый треугольник. Одной из его сторон является сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Другая сторона треугольника — реакция опоры $\vec{R}$. Величина этой силы зависит от направления силы $\vec{F}$, но направление ее неизменно и определяется лишь величиной коэффициента трения (см. рис. 7):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|\vec{F}_{тр}|}{|\vec{N}|} = \mu.$$

Сила $\vec{F}$, вообще говоря, может быть направлена под любым углом α к горизонту. Но тело движется равномерно, и треугольник сил должен быть замкнут. Это достигается тем, что одновременно с изменением направления силы $\vec{F}$ изменяется ее величина и величина силы $\vec{R}$. На рисунке 8 изображены два треугольника, определяемые соотношениями

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{F}_1 = 0$$

и

$$m\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{F}_2 = 0.$$

Из этого рисунка видно, что сила $\vec{F}$ будет минимальной по абсолютной величине в том случае, если она перпендикулярна к линии действия силы $\vec{R}$. Очевидно, что при этом угол ее

(Окончание см. с. 82—83.)

Э. Шувалова

Координатный метод

Векторная алгебра и координатный метод, содержащиеся в новой программе школьного курса математики, являются мощным аппаратом для решения многих геометрических задач, и прежде всего потому, что они не требуют рассмотрения сложных геометрических конфигураций. Эти методы сводят геометрическую задачу к алгебраической, решить которую обычно легче, чем исходную геометрическую. Координатным методом обязан владеть каждый инженер, и поэтому на знание координатного метода обращается особое внимание на вступительных экзаменах в технические вузы.

Программой вступительных экзаменов в вузы по математике (см. «Квант», 1977, № 2) предусматривается, что «экзаменующийся должен уметь... использовать методы алгебры и начал анализа при решении геометрических задач» (п. 8 раздела «Основные умения»).

Этим вопросам и посвящена настоящая статья.

1. Вычисление углов

З а д а ч а 1. *Даны величины двух плоских углов трехгранного угла:* $\widehat{AOB}=\alpha$, $\widehat{AOC}=\beta$. *Найти третий плоский угол, если противолежащий ему двугранный угол — прямой* ($\alpha<\pi/2$, $\beta<\pi/2$).

Построим прямоугольную систему координат. Ее начало совместим с вершиной O данного трехгранного угла, ось Oz направим вдоль ребра OA прямого двугранного угла, ось Ox поместим в плоскости AOC, ось Oy — в плоскости AOB (рис. 1). Требуется найти $\widehat{BOC}$. Отложим на ребрах OA, OB и OC единичные векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1}=(0;\ 0;\ 1),$$

$$\overrightarrow{OB_1}=(0;\ \sin\alpha;\ \cos\alpha),$$

$$\overrightarrow{OC_1}=(\sin\beta;\ 0;\ \cos\beta).$$

Так как

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OC_1}}{|\overrightarrow{OB_1}|\cdot|\overrightarrow{OC_1}|},$$

то

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{0\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot 0+\cos\alpha\cdot\cos\beta}{1\cdot 1}$$

и $\widehat{BOC}=\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$.

З а д а ч а 2. *Найти угол между диагональю BD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и диагональю A_1D его грани, если* $|AD|=a$, $|DC|=b$, $|DD_1|=c$.

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 2. В этой системе координат

$$\overrightarrow{AD}=(a;\ 0;\ 0),$$

$$\overrightarrow{AB}=(0;\ b;\ 0),$$

$$\overrightarrow{AA_1}=(0;\ 0;\ c),$$

(Окончание. Начало см. с. 77—81)

наклона к горизонту

$$\alpha=\beta=\operatorname{arctg}\mu.$$

В заключение предлагаем читателям в качестве упражнений решить самостоятельно пять задач. Советуем обратить особое внимание на смысл тех или иных упрощений, содержащихся в условии задачи.

У п р а ж н е н и я

1. Барон Мюнхаузен при полете на Луну использовал пушку с длиной ствола $L=600$ м. Чтобы отправить снаряд в межпланетное пространство, ему нужно было сообщить скорость $|\vec{v}|=12$ км/с. Определить, с какой силой давил на дно снаряда барон Мюнхаузен, находящийся внутри снаряда, если его масса $m=80$ кг. Считать, что снаряд в стволе пушки двигался равноускоренно в направлении по вертикали вверх.

2. Два тела массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью пренебрежимо малой массы, движутся под действием силы $\vec{F}$ по горизонтальной поверхности (рис. 9). Коэффициент трения грузов о поверхность равен

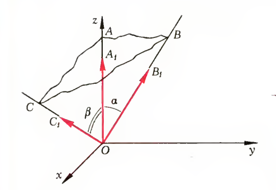


Рис. 1.

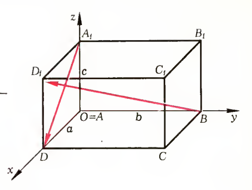


Рис. 2.

$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = (a; -b, c)$,

$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} = (a;\ 0;\ -c)$.

Отсюда получаем:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1D}}\right) = \frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Поскольку углом между двумя прямыми называется величина м е н ь ш е г о из углов, определяемых этими прямыми (см. «Геометрия 9», § 24), то при $a^2-c^2 \geqslant 0$ искомый угол равен

$$\arccos\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a^2+c^2}},$$

а при $a^2-c^2<0$ он равен

$$\pi - \arccos\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a^2+c^2}}.$$

С учетом формулы

$$\pi - \arccos t = \arccos(-t)$$

ответ можно записать в таком виде:

$$\left(\widehat{BD_1, A_1D}\right) = \arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a^2+c^2}}.$$

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми

З а д а ч а 3. *Найти расстояние между диагоналями AD_1 и DC_1 двух смежных граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a.*

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 3. В этой системе

$$\overrightarrow{AB} = (a;\ 0;\ 0),$$
$$\overrightarrow{AD} = (0;\ a;\ 0),$$
$$\overrightarrow{AA_1} = (0;\ 0;\ a),$$
$$\overrightarrow{AD_1} = (0;\ a;\ a),$$
$$\overrightarrow{DC_1} = (a;\ 0;\ a).$$

Искомое расстояние равно длине общего перпендикуляра MN прямых AD_1 и DC_1. Можно действовать следующим образом. Обозначим через α и β числа, которые определяют положение точек M и N:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\cdot\overrightarrow{AD_1},\quad \overrightarrow{DN} = \beta\cdot\overrightarrow{DC_1}$$

μ. Во сколько раз изменится натяжение нити, если коэффициент трения уменьшится в два раза?

3. Ракета взлетает вертикально вверх под действием газов, образующихся при сгорании топлива и вылетающих со скоростью $|\vec v| = 1000$ м/с относительно Земли. На какую максимальную высоту поднимется ракета, если двигатель работал $\Delta t = 2$ с, а отношение массы сгоревшего газа к массе ракеты $m/M = 0{,}1$? Изменением массы ракеты при взлете и сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Пожарный держит шланг под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Расход воды из шланга равен $G = 50$ кг/с. Скорость вылетающей воды $|\vec v| = 20$ м/с. На сколько увеличивается сила давления пожарного на пол?

5. На рисунке 10 изображена система двух тел массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг, соединенных нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный и подвижный блоки. В начальный момент первое тело находится посередине наклонной плоскости длиной $L = 3$ м, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Через какое время это тело достигнет края наклонной плоскости, если коэффициент трения о наклонную плоскость $\mu = 0{,}25$? Трением в блоках, а также массой блоков и нити пренебречь.

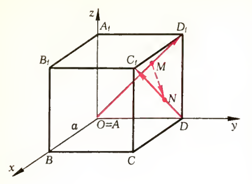


Рис. 3.

(поскольку точка M лежит иа прямой AD_1 тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AD_1}$ коллиеарны, и аиалогично для точки N). Теперь иайдем

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

и запишем условия перпеидикулярности векторов $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC_1}$; это даст иам два уравнения, из которых мы найдем α и β, а потом и длиу вектора $\overrightarrow{MN}$.

Проведем необходимые вычислеиия:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\alpha \cdot \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD} + \beta \cdot \overrightarrow{DC_1} = (\beta a;\ a(1-\alpha);\ a(\beta-\alpha))$.

Записывая скаляриые произведеиия $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DC_1}$ в координатах и приравнивая их иулю (условие перпеидикуляриости двух векторов), получаем систему

$$\begin{cases} a^2(1-\alpha) + a^2(\beta-\alpha) = 0, \\ a^2\beta + a^2(\beta-\alpha) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 1 + \beta - 2\alpha = 0, \\ 2\beta - \alpha = 0, \end{cases}$$

$\alpha = {}^2/_3$, $\beta = {}^1/_3$. Теперь

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{3};\ \frac{a}{3};\ -\frac{a}{3}\right),$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

З а д а ч а 4. *В пространстве даны два луча AM и BK, не лежащие в одной плоскости и образующие между собой угол $\pi/2$; отрезок AB — их общий перпендикуляр. На лучах AM и BK взяты точки E и F так, что*

$$2\,|AE| \cdot |BF| = |AB|^2.$$

Доказать, что расстояние от середины C отрезка AB до прямой EF равно $|AB|/2$.

Построим прямоугольиую систему координат, как показано иа рисуике 4. Искомое расстояиие равно длиие высоты CD треугольиика CEF. Найти ее можно из треугольиика CDE, если знать длиину стороиы EC и величиину угла CED. Положим $\varphi = \widehat{CED}$, $|AB| = a$, $|BF| = p$, $|AE| = m$, тогда по условию $2mp = a^2$. Запишем координаты иекоторых точек и векторов:

$C(0;\ 0;\ a/2)$, $E\ (m;\ 0;\ 0)$, $F\ (0;\ p;\ a)$; $\overrightarrow{EC} = (-m;\ 0;\ a/2)$, $\overrightarrow{EF} = (-m;\ p;\ a)$.

Имеем:

$$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{EF}, \widehat{\ }\ \overrightarrow{EC}\right) = \frac{m^2 + \frac{a^2}{2}}{\sqrt{m^2 + p^2 + a^2}\ \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}}.$$

Подставляя вместо a^2 его выражеиие через m и p и учитывая, что $m > 0$ и $p > 0$, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{m^2 + mp}{(m+p)\sqrt{m^2 + \frac{mp}{2}}} = \frac{m}{|\overrightarrow{EC}|}.$$

Уже отсюда видио, что $\widehat{AEC} = \varphi$ (из

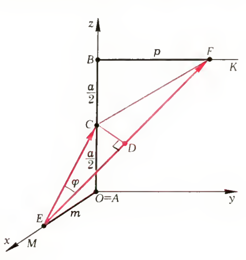


Рис. 4.

ΔAEC), поэтому $|CD| = |CA| = a/2$. Можно также (чисто формально) найти $|ED| = |EC| \cos \varphi = m$, а потом по теореме Пифагора $|CD|$, или

$$|CD| = |CE| \sin \varphi = |CE| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.$$

3. Задачи на сечения

Обычно в таких задачах требуется найти сечение многогранника плоскостью (то есть его форму и площадь). В сечении получается многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника, а сторонами — отрезки прямых, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника.

Стоит напомнить, что секущая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым — это часто помогает при решении задач, например, на сечение куба. При вычислении площади сечения бывает полезна формула, связывающая площадь фигуры с площадью ее проекции $S_{\text{пр}} = S_{\text{фиг}} \cdot \cos \varphi$ (см. «Геометрия 10», § 50). Нередко эта формула позволяет вообще не находить само сечение, а сразу дает его площадь.

Задача 5. *Найти форму и площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BC и центр грани CDD_1C_1.*

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 5. Уравнение секущей плоскости как общее уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Соотношение между коэффициентами a, b, c, d можно найти из условия, что точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $E(1;\ {}^1/_2;\ 0)$ (середина ребра BC) и M $({}^1/_2;\ 1;\ {}^1/_2)$ (центр грани CDD_1C_1) лежат в этой плоскости, то есть координаты этих точек должны удовлетворять уравнению плоскости. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a \cdot 1 + b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot 0 + d = 0, \\ a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot 1 + c \cdot \frac{1}{2} + d = 0. \end{cases}$$

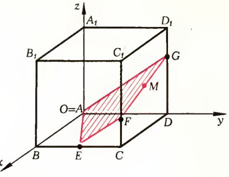


Рис. 5.

Из этой системы получаем $d = 0$, $b = -2a$, $c = 3a$, то есть уравнение секущей плоскости имеет вид

$$ax - 2ay + 3az = 0.$$

При разных a (не равных нулю) получается уравнение одной и той же плоскости (почему?), поэтому положим $a = 1$. Тогда уравнение секущей плоскости запишется так:

$$x - 2y + 3z = 0.$$

Теперь легко найти координаты точек пересечения секущей плоскости с ребрами куба. Координаты точки F должны иметь вид F $(1;\ 1;\ f)$, поскольку точка F лежит на прямой CC_1; кроме того, точка F лежит в секущей плоскости, это дает уравнение

$$1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot f = 0,$$

откуда $f = {}^1/_3$. Итак, F $(1;\ 1;\ {}^1/_3)$. Аналогично находим G $(0;\ 1;\ {}^2/_3)$, откуда ясно, что сечение — четырехугольник, причем трапеция ($[AG] \parallel [EF]$). Можно было бы найти ее основания и высоту, а по ним — и площадь трапеции, но проще поступить иначе. Проекцией сечения $AEFG$ на плоскость $ABCD$ является четырехугольник $AECD$, площадь которого равна ${}^3/_4$. Косинус угла между плоскостями $AEFG$ и $ABCD$ равен абсолютной величине косинуса угла между векторами, перпендикулярными этим плоскостям, например $\vec{n}_1 = (1;\ -2;\ 3)$ и $\vec{n}_2 = \overrightarrow{AA_1} = (0;\ 0;\ 1)$ (см. «Геометрия 10», § 46, зад. 43), поэтому

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Следовательно,

$$S_{AEFG} = \frac{3/4}{3/\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Задача 6. *Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения была наименьшей?*

Пусть секущая плоскость проходит через диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и пересекает ребро CD в точке E (случай, когда секущая плоскость пересекает другое ребро, сводится к этому поворотом куба вокруг диагонали AC_1 и переменой обозначений). Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 6, ребро куба положим равным 1 (почему это можно сделать?). Сечением куба является параллелограмм AEC_1F (сечению принадлежат точки A, E, C_1, а потому и точка F, определяемая условиями $[C_1F] \parallel [EA]$, $[AF] \parallel [EC_1]$). Его проекцией на плоскость грани ADD_1A_1 является сама эта грань, поэтому

$$S_{AEC_1F} = \frac{S_{ADD_1A_1}}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

где φ — величина двугранного угла между плоскостями AEC_1F и ADD_1A_1. Нас интересует наибольшее значение $\cos\varphi$. Дальше можно действовать как в предыдущей задаче. Найдем координаты некоторых точек:

$A(0;\ 0;\ 0)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $E\ (e;\ 1;\ 0)$

(абсцисса точки E пока не известна); затем уравнения плоскостей:

AEC_1F: $1\cdot x - e\cdot y + (e-1)z = 0$,

ADD_1A_1: $1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0$;

затем перпендикулярные этим плоскостям векторы:

$$\vec{n}_1 = (1;\ -e,\ e-1),$$

$$\vec{n}_2 = (1;\ 0;\ 0)$$

и косинус угла между ними:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+e^2+(e-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e^2-e+1}}.$$

Наибольшее значение $\cos\varphi$ достигается при наименьшем значении $e^2 - e + 1$, которое в свою очередь достигается при $e = 1/2$ (проверьте!). Итак, точка E должна быть серединой ребра CD.

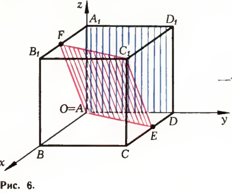


Рис. 6.

4. Пирамида и шар

Задача 7. *Пирамида, основанием которой служит правильный треугольник со стороной а, вписана в сферу. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, третья грань образует с плоскостью основания двугранный угол φ. Найти площадь сферы.*

Если две боковые грани перпендикулярны плоскости основания пирамиды, то и боковое ребро, являющееся пересечением этих граней, перпендикулярно основанию. Обозначим вершину пирамиды через S, второй конец рассматриваемого ребра через O, две другие вершины основания через A и B и построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 7. Как известно, центр O_1 сферы, описанной около пирамиды, проектируется в центр O_2 окружности, описанной около основания пирамиды. Найдем координаты некоторых точек (рис. 7):

$$O\ (0;\ 0;\ 0),\ A\ (0;\ a,\ 0),$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right),$$

$$O_2\left(\frac{a}{2\sqrt{3}};\ \frac{a}{2};\ 0\right).$$

Обозначим через s и h числа, описывающие положения точек S и O_1: $S\,(0;\ 0;\ s)$, $O_1\ \left(\frac{a}{2\sqrt{3}};\ \frac{a}{2};\ h\right)$.

Тогда мы можем написать два уравнения: первое—равенство расстояний $|O_1S|$ и $|OO_1|$ (равенство расстояний

$|OO_1|$, $|O_1A|$ и $|O_1B|$ будет выполняться автоматически, поскольку $[O_1O_2] \perp (OAB)$ и O_2—центр треугольника OAB), второе—условие, что $\cos((SAB)\widehat{\ }(OAB)) = \cos\varphi$ в координатной форме.

Легко найти, что уравнение плоскости SAB имеет вид

$$\frac{s}{\sqrt{3}}\cdot x + s\cdot y + a\cdot z - a\cdot s = 0,$$

причем вектор $\vec{n}_1 = \left(\frac{s}{\sqrt{3}};\ s;\ a\right)$ перпендикулярен этой плоскости, а плоскости OAB перпендикулярен вектор $\vec{n}_2 = (0;\ 0;\ 1)$. Теперь получаем два уравнения:

$$\sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} + (h-s)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} + h^2},$$

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{s^2}{3} + s^2 + a^2}} = \cos\varphi.$$

Из второго уравнения находим

$$s = \frac{\sqrt{3}}{2} a \operatorname{tg}\varphi,$$

а после этого из первого

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4} a \operatorname{tg}\varphi.$$

Теперь

$$R^2 = |OO_1|^2 = \frac{a^2(16 + 9\operatorname{tg}^2\varphi)}{48}$$

и

$$S_{сф} = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2(16 + 9\operatorname{tg}^2\varphi)}{12}.$$

Задача 8. *Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Два двугранных угла при ребрах основания — прямые, а два других равны φ. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.*

Построим прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 8. Центр O_1 сферы должен быть удален от всех граней пирамиды, в частности, и от координатных плоскостей, на расстояние r — радиус сферы, поэтому его координаты имеют вид $O_1(r;\ r;\ r)$. Плоскость SBC содержит точки $B(a;\ a;\ 0)$, $C(0;\ a;\ 0)$ и $S(0;\ 0;\ a\operatorname{tg}\varphi)$, отсюда находим ее уравнение:

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot y + z - a\operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Расстояние от точки O_1 до плоскости SBC, с одной стороны, должно быть равно r; с другой стороны, его можно выразить через координаты точек S, B, C: вектор $\overrightarrow{O_1Q}$, перпендикулярный плоскости SBC ($Q \in (SBC)$), коллинеарен вектору $\vec{n} = (0; \operatorname{tg}\varphi;\ 1)$ (координаты вектора $\vec{n}$ найдены из уравнения плоскости SBC), поэтому

$$\overrightarrow{O_1Q} = h\cdot\vec{n} = (0;\ h\operatorname{tg}\varphi;\ h).$$

Теперь, зная координаты точки O_1, находим координаты точки Q

$$Q(r;\ h\operatorname{tg}\varphi + r;\ h + r)$$

и значение h из условия, что точка Q принадлежит плоскости SBC (то есть координаты точки Q удовлетворяют уравнению плоскости SBC):

$$\operatorname{tg}\varphi\,(h\operatorname{tg}\varphi + r) + h + r - a\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

откуда

$$h = (a\operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi,$$

$$|\overrightarrow{O_1Q}| = |h|\cdot|\vec{n}| = (a\operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = (a\operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos\varphi$$

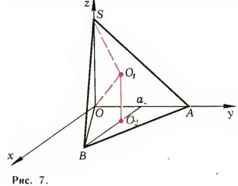


Рис. 7.

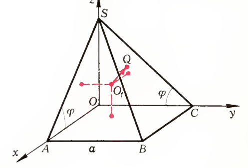


Рис. 8.

(легко видеть, что $h>0$). Поскольку должно быть $|\overrightarrow{O_1Q}| = r$, получаем уравнение

$$(a \operatorname{tg}\varphi - r - r\operatorname{tg}\varphi)\cos\varphi = r,$$

из которого находим r:

$$r = \frac{a\sin\varphi}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

Упражнения

1. Докажите, что площадь произвольного треугольника ABC можно вычислять по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2\cdot|AC|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

2. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна a, высота h. Найти расстояние между прямыми BD и SA.

4. Ребра тетраэдра равны l. Найти расстояния между скрещивающимися высотами граней тетраэдра.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом α. Под каким углом к плоскости основания наклонена плоскость, рассекающая этот параллелепипед по квадрату?

6 (МГУ, мехмат, 1970). Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, точка D — основание высоты BD треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

7 (МГУ, физфак, 1976). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точка E — середина ребра A_1D_1, точка F — середина ребра AA_1. Найти радиус меньшей сферы, проходящей через точки E и F и касающейся граней двугранного угла, образованного плоскостями BB_1C_1C и DD_1C_1C.

Приложение

Основные формулы метода координат

Координаты вектора $\vec{a}$	$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x; y; z)$ $x = \vec{a}\cdot\vec{i},\ y = \vec{a}\cdot\vec{j},\ z = \vec{a}\cdot\vec{k}$
Координаты точки M	Если $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, то $M(x; y; z)$
Связь координат вектора $\overrightarrow{AB}$ с координатами его начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$	$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$
Формулы параллельного переноса $\vec{p} = (a; b; c)$, $M(x; y; z)$	$\vec{p}(M) = M_1(a + x;\ b + y;\ c + z)$
Сумма и разность векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$
Произведение вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ на число p	$p\vec{a} = (px; py; pz)$
Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Длина вектора $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Угол между векторами $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$	$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
Формулы гомотетии с центром $O\ (0;\ 0;\ 0)$ и коэффициентом k, $M\ (x;\ y;\ z)$	$H_O^k(M) = M_1\ (kx;\ ky,\ kz)$
Уравнение плоскости	$ax + by + cz + d = 0$
Уравнения полупространств с границей α: $ax + by + cz + d = 0$	открытые — содержат точку $O\ (0;\ 0;\ 0)$ при: $ax + by + cz + d > 0$ — $d > 0$ $ax + by + cz + d < 0$ — $d < 0$ замкнутые: $ax + by + cz + d \geqslant 0$ — $d \geqslant 0$ $ax + by + cz + d \leqslant 0$ — $d \leqslant 0$
Вектор, перпендикулярный плоскости α: $ax + by + cz + d = 0$	$\vec{n}_\alpha = (a;\ b;\ c)$
Уравнение плоскости, содержащей точку $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (a;\ b;\ c)$	$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$
Угол между плоскостями α: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, β: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, $\vec{n}_\alpha = (a_1;\ b_1;\ c_1)$, $\vec{n}_\beta = (a_2;\ b_2;\ c_2)$	$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \lvert\cos(\widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta})\rvert = \frac{\lvert a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$
Площадь $S_{пр}$ ортогональной проекции на плоскость β многоугольника площади S, лежащего в плоскости α	$S_{пр} = S \cdot \cos(\widehat{\alpha, \beta})$
Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $S\ (a;\ b;\ c)$	$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$
Уравнение плоскости, касающейся сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ в точке $A\ (m;\ p;\ q)$	$(m - a)(x - a) + (p - b)(y - b) + (q - c)(z - c) = R^2$. $(a - m)(x - m) + (b - p)(y - p) + (c - q)(z - q) = 0$.

А. Виленкин



Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в IV квартале этого года и представляющие интерес для наших читателей. Большинство из них можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Волынский Б. А. *Сферическая тригонометрия.* Объем 6 л., тираж 15 000 экз., цена 20 к.

В книге рассматриваются вопросы геометрии на поверхности сферы, сферические двуугольники и треугольники, а также соотношения между основными элементами сферических треугольников. Выводятся формулы, связывающие стороны и углы сферических треугольников.

Книга предназначена для людей, интересующихся астрономией. Она может быть использована на занятиях астрономического кружка.

2. Погорелов А. В. *Элементарная геометрия.* Издание 3-е, доп. Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 43 к.

Эта книга, написанная крупным ученым-геометром, содержит материал, несколько выходящий за рамки школьной программы. Однако она может служить хорошим пособием для лиц, интересующихся геометрией, и для преподавателей математики в средних школах.

Издательство «Просвещение»

3. Воротников И. А. *Занимательное черчение.* Издание 3-е, перераб. Объем 13 л., тираж 80 000 экз., цена 55 к.

Занимательная форма задач и упражнений, помещенных в книге, хорошо сочетается с их ярко выраженным практическим содержанием. Предлагаемые графические задачи опираются на широкий круг явлений и фактов повседневной жизни. Решаются они с помощью тех знаний, которые ученики получают из школьного курса черчения.

Издательство «Знание»

4. *«Число и мысль».* Сборник статей. Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 27 к.

Сборник подготовлен группой ведущих советских ученых — членами-корреспондентами АН СССР Н. Н. Моисеевым, А. А. Ляпуновым, академиком А. А. Дородницыным и др.

Авторы в научно-популярной форме рассказывают о том, что нового принесли математические методы моделирования в решение биологических, социологических, экономических и других проблем.

Сборник рассчитан на широкий круг читателей.

Книги серии «Математика и кибернетика»

5. Вентцель Е. С. *Теория вероятностей* (первые шаги).

Автор брошюры — видный советский ученый—популярно рассказывает о теории вероятностей, о том, как сложилась эта дисциплина, как нашла широчайшее применение почти во всех отраслях современной науки, а также о том, как начать ее изучение.

Брошюра является своеобразным предисловием к углубленному изучению теории вероятностей.

6. Гнеденко Б. В., Канторович Л. В. и др. *Математика — народному хозяйству.*

Сборник включает статьи крупнейших советских ученых,—академиков Л. В. Канторовича, В. П. Тихонова, академика АН УССР Б. В. Гнеденко и др. Интересно и доступно авторы рассказывают о важнейших научных проблемах, поставленных всем ходом развития народного хозяйства и успешно решенных при участии математики; о теории линейного программирования, теории очередей, оптимального планирования, исследований операций и других важнейших приложениях математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. Смородинский Я. А. *Тяготение.* (Библиотечка физико-математической школы.) Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 17 к.

Основная часть книги посвящена применению закона всемирного тяготения к решению простых задач, связанных с падением тел, движением планет и космических аппаратов. Решение задач не требует знания высшей математики. Используются лишь формулы векторной алгебры, краткие сведения о которой помещены в приложении. В книге изложена история науки о тяготении, о законах движения тел в поле тяжести и о тех изменениях, которые принесла с собой общая теория относительности.

Книга предназначена для школьников старших классов и учащихся техникумов.

2. Гладкова Р. А. и др. *Сборник задач и вопросов по физике.* Объем 20 л., тираж 30 000 экз., цена 64 к.

Материал, помещенный в книге, полностью охватывает всю школьную программу по курсу физики. Приведенные задачи для отдельных тем расположены в порядке возрастания трудности. В начале каждого параграфа приведены примеры решения типичных задач с подробными объяснениями.

Книга рассчитана на школьников старших классов и учащихся техникумов, а также на лиц, готовящихся самостоятельно к поступлению в институт.

3. Шаскольская М. П. *Кристаллы.* Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 90 к.

В книге в простой и доступной форме рассказывается о том, как возникают и

растут кристаллы в природе, как выращивают кристаллы в лабораториях и на заводах, о закономерностях в структуре кристаллов и об их удивительных свойствах, о широком применении кристаллов в самых различных областях техники.

Хотя книга рассчитана на преподавателей, школьников старших классов, инженеров и техников, но и специалист почерпнет из нее много нового для себя.

4. Х у р г и н Я. И. *Да, нет или может быть...* Объем 10 л., тираж 75 000 экз., цена 33 к.

При управлении технологическими процессами, летательными аппаратами, экономическими и социальными системами весьма часто приходится принимать решения в обстановке случайности, при наличии ошибок и помех. Тогда на первый план выступают вероятностно-статистические методы. Изучение функционирования живых организмов с позиций теории управления опирается на те же методы. В занимательной форме, без применения сложного математического аппарата, на простых примерах из области естествознания и техники в книге рассказывается о современной математической статистике, о теории статистических выводов и принятия решений, о построении математических моделей реальных явлений и о статистической теории эксперимента.

Книга рассчитана на школьников старших классов и всех, интересующихся современной теорией управлений.

5. Е ф р е м о в Ю. Н. *В глубины Вселенной.* Издание 2-е, перераб. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

Книга посвящена строению окружающего нас мира звезд и галактик, истории его изучения и методам определения расстояний во Вселенной. Именно развитие методов нахождения расстояний и позволило узнать Вселенную: только зная расстояние небесного объекта, можно что-то сказать о его природе. История астрономии — это история споров о расстояниях: сначала Солнца и Луны, затем звезд н, уже в начале нашего века, галактик.

Книга написана живо и хорошо иллюстрирована. Рассчитана на широкий круг лиц со средним образованием и школьников старших классов, интересующихся проблемами астрономии.

Издательство «Знание»

6. *Физика наших дней.* Сборник статей. Объем 8 л. тираж 100 000 экз., цена 24 к.

В книге в научно-популярной форме изложены основные фундаментальные и прикладные направления современной физики, играющие важную роль в научно-технической революции.

Теория относительности, проблемы и перспективы термоядерного синтеза, квантовая электроника, физика лазеров — этим и другим вопросам посвящена книга.

Она предназначена для самого широкого круга читателей.

7. Ф а б р и к а н т В. А., Г л а з у н о в А. Г. *Достижения физики — народному хозяйству.* Объем 7 л., тираж 100 000 экз., цена 21 к.

Книга посвящена современным достижениям физики, поставленным на службы народному хозяйству.

Авторы рассказывают об использовании новых методов в технологии производства, о применении новейших физических данных в технике связи, в энергетике. В книге также нашел отражение вопрос: какой вклад вносит физика наших дней в проблему оздоровления среды обитания человека?

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

И. Клумова, М. Смолянский

Конкурс художников

Это соревнование началось в «Кванте» № 4 за 1976 год. Напоминаем, что точки в декартовой системе координат нужно ставить по очереди и соединять каждую точку отрезком с предыдущей точкой. Если вы все сделаете без ошибки, то у вас получатся... Впрочем, что у вас получится увидите сами!

1. (6; 1), (6; —1), (7; —3), (7; —6), (6; —7), (5; —7), (6; —6), (6; —4), (5; —6), (4; —7), (3;—7), (4; —6), (5; —3), (4; —1), (1; —2), (—2; —2), (—2; —3), (—1; —6), (—2; —7), (—3; —7), (—2; —6), (—3; —3), (—3; —6), (—4; —7), (—5; —7), (—4; —6), (—4; —3), (—5; —1), (—5; 0), (—6; 3), (—7; 3), (—9; 1), (—10; 2), (—9; 4), (—9; 5), (—8; 6), (—8; 7), (—7; 6), (—7; 7), (—6; 6), (—4; 5), (—2; 3), (2; 2), (5; 3), (7; 2), (8; —3), (7; —4), и (—8,5; (4,5).

2. (—3; —5), (—4; —7), (—8; —12), (—10; —12), (—8; —11), (—6; —6), (—7; —4), (—12; 2), (—13; 6), (—12; 9), (—13; 10), (—15; 9), (—15; 10), (—14; 11), (—12), 12), (—11; 13), (—9; 12), (—8; 13), (—8; 12), (—7; 10) (—7; 7), (—5; 5), (—3; 8), (—2; 9), (—2; 10), (—1; 11), (0; 11), (1; 10), (2; 8), (3; 8), (5; 10), (6; 12), (8; 13), (11; 9), (11; 8), (13; 4), (15; 2), (15; 0), (14; 2), (13; 3), (12; —2), (12; —3), (13; —6), (10; —12), (8; —12), (10; —11). (11; —6), (10; —3), (3; —12), (1; —12), (3; —11), (5; —8), (6; —6), (6; —4), (8; 2), (4; 0), (2; —2), (—1; —4) (—2; —6), (—5; —12), (—7; —12), (—5; —11), (—4; —7), и (—11,5; 11,5).

3. (0; —2), (2; —3), (3; —4), (7; —6), (9; —8), (9; —10), (10; —12), (8; —11), (9; —12), (7; —11), (6; —10), (3; —10), (4; —9), (0; —7), (—1; —7), (—4; —8), (—7; —10), (—8; —12), (—8; —10), (—10; —9), (—8; —9), (—4; —5), (—1; —4), (1; —4), (1; —3), (0; —2), и (8,5; —9).

Жизнь — научный подвиг

У знаменитой польской ученой Марии Склодовской-Кюри (или, как чаще ее именуют, Марии Кюри) было две дочери. Старшая из них — Ирэн — также стала всемирно известным физиком. Вместе со своим мужем Фредериком Жолио-Кюри она открыла искусственную радиоактивность и была удостоена за это открытие Нобелевской премии. Младшая дочь Ева стала журналисткой. Она-то и написала великолепную книгу о своей матери. Эта книга называется «Мария Кюри». Ее впервые издали в 1937 году во Франции, где она выдержала потом более сотни переизданий. Книга Евы Кюри переведена на двадцать пять языков. В 1959 году вышло первое советское издание этой книги. А в 1976 году издательство «Атомиздат» выпустило тиражом в 200 000 экземпляров четвертое издание*).

История науки знает не так уж много имен выдающихся женщин-ученых. И среди них на первом месте, безусловно, стоит имя Марии Кюри. За выдающиеся научные заслуги она была избрана почетным членом ста шести академий, научных учреждений и обществ, в том числе в 1926 году — почетным членом Академии наук СССР. А Нобелевская премия — высшая международная научная награда — присуждалась ей дважды.

Вся жизнь Марии Кюри была отдана науке. Вместе со своим мужем знаменитым французским физиком Пьером Кюри она заложила фундамент современных представлений о радиоактивном распаде природных элементов. Рентген, Беккерель, Пьер и Мария Кюри, Резерфорд, Бор — таковы имена основоположников наших знаний о природе атомов и атомных ядер.

В учебнике по физике для десятого класса среди портретов выдающихся ученых есть и портрет Марии Кюри. Рядом с ним помещены две даты: 1867—1934 — годы рождения и смерти. Вот и все, что о ней, как о человеке, можно узнать из учебника. А ведь она прожила удивительную и неповторимую жизнь! Конечно, учебник не может вдаваться в такие подробности. Рассказывая о жизни науки, он ничего не рассказывает о жизни ее творцов.

Книга Евы Кюри прослеживает весь жизненный путь ее матери, от первых шагов в здании мужской гимназии на Новолипской улице в Варшаве, где жили ее родители, до последних минут в лучшей палате санатория в Сансельльмозе, где она умерла. Именно жизнь Марии Кюри, а не пересказ ее выдающихся научных достижений, заполняет страницы этой книги. Читая ее, шаг за шагом знакомишься не только с событиями этой необычайно трудной, полной суровых испытаний жизни, но и с мыслями и чувствами ее героев. В книгу включено много писем и других документов, принадлежащих самой Марии Кюри и ее близким. А читается она как увлекательная художественная повесть.

Бо́льшая часть жизни Марии Кюри была пронизана упорной борьбой за самые скромные средства существования. Она рано лишилась матери. После блестящего окончания гимназии ей пришлось давать частные уроки, работать гувернанткой в провинциальных городках, чтобы накопить немного денег для дальнейшей учебы. Но в Польше того времени университеты не принимали на учебу женщин. Марии Склодовской пришлось ехать в Париж и жить там, вдали от родных, на такие скромные средства, что нередко дело доходило до голодных обмороков.

Неожиданная встреча с молодым необычайно талантливым французским физиком Пьером Кюри преобразила всю ее жизнь. Супруги Кюри начинают совместную работу по изучению явления радиоактивности, открытого Анри Беккерелем незадолго до их свадьбы. Потребовалось четыре года непрерывного, изнуряющего и, как позднее выяснилось, чрезвычайно опасного для здоровья труда в старом сарае с дырявой стеклянной крышей, чтобы из нескольких тонн урановой руды выделить ничтожное количество новых элементов, которые Мария Кюри назвала «полонием» (в честь своей родины Польши) и «радием». Не имея никакой государственной помощи, расходуя свои скромные средства на приобретение сырья, оборудования, реактивов, супруги Кюри выполняли работу грузчиков, кочегаров, лаборантов, химиков-аналитиков и физиков-исследователей. И все эти годы Мария Кюри даже не состояла в штате Школы физики, которой принадлежал сарай. Там преподавал Пьер, а ей милостиво разрешали работать бесплатно.

Это был беспримерный научный подвиг. Вот как писала об этом мадам Кюри в одном из своих писем: «В ту пору мы с головой ушли в новую область, которая раскрылась перед нами благодаря неожиданному открытию. Несмотря на трудные условия работы, мы чувствовали себя вполне счастливыми. Все дни мы проводили в лаборатории. В жалком сарае царил полный мир и тишина; бывало, что приходилось только следить за ходом той или другой операции, тогда мы прогуливались взад и вперед по сараю, беседуя о нашей теперешней и будущей работе; озябнув, подкреплялись чашкой чаю тут же у печки. В нашем общем, едином увлечении мы жили как во сне...»

За исследования радиоактивности в декабре 1903 года супругам Кюри совместно с Беккерелем присуждают Нобелевскую премию. К ним приходит всемирная известность. Но у них очень странное отношение к славе —

*) Е. Кюри. Мария Кюри. М., «Атомиздат», 1976.

они видят в ней прежде всего неприятную обузу, преграду для дальнейших исследований. В разное время сначала Пьер, а затем и Мария Кюри отказались от ордена Почетного легиона — одного из высших орденов Французской республики. В письме на имя декана Института физики, химии и естественных наук Пьер Кюри высказался по этому поводу кратко, но весьма выразительно: «Прошу Вас, будьте любезны передать господину министру мою благодарность и уведомить его, что не имею никакой нужды в ордене, но весьма нуждаюсь в лаборатории». (Он так и не получил желанной лаборатории до последних дней жизни.)

А вот и другие свидетельства их отвращения к славе: «Нас завалили письмами, и нет отбоя от журналистов и фотографов. Хочется провалиться сквозь землю, чтобы иметь покой...» (из письма Марии Кюри брату Юзефу Склодовскому). «Вы сами явились свидетелем внезапного увлечения радием. Это наградило нас всеми прелестями популярности: нас преследовали журналисты и фотографы со всех стран света; они доходили до того, что передавали разговор моей дочери с няней и описывали нашего тигрового кота. Кроме того, нам писали письма и посещали лично всякие эксцентричные личности и безвестные изобретатели... Наконец, коллекционеры автографов, снобы, светские люди... А со всем тем ни одной минуты покоя в лаборатории, ... Я чувствую, как тупею от такого образа жизни...» (из письма Пьера Кюри Жоржу Гуи).

Но не только отношение к славе являлось своеобразием их личностей. Они проявили также поразительную бескорыстность, отказавшись запатентовать технологию получения радия. А ведь такой патент принес бы им огромные богатства. «По соглашению со мной — пишет Мария Кюри в своих воспоминаниях — Пьер отказался извлечь материальную выгоду из нашего открытия; мы не взяли никакого патента и, ничего не скрывая, обнародовали результаты наших исследований, а также способы извлечения чистого радия. Более того, всем заинтересованным лицам мы давали требуемые разъяснения. Это пошло на благо производства радия, которое могло свободно развиваться, сначала во Франции, потом за границей, поставляя ученым и врачам продукты, в которых они нуждались...

Подавляющее большинство моих друзей утверждают, и не без оснований, что если бы Пьер Кюри и я узаконили наши права, мы приобрели бы средства, достаточные для того, чтобы самим построить Институт радия, а не преодолевать бесконечные препятствия и трудности, которые ложились тяжким бременем на нас обоих, а теперь лежат на мне. И все-таки я думаю, что мы были правы, ... человечеству необходимы и мечтатели, для которых бескорыстное служение какому-нибудь делу настолько увлекательно, что им и в голову не приходит заботиться о личных материальных благах».

Бескорыстность неразрывно сочеталась у них с самоотверженностью, готовностью к самопожертвованию во имя интересов науки, интересов человечества. На страницах 165—166 мы читаем: «Немецкие ученые Вальхов и Гизель заявили в 1900 году, что новое вещество действует физиологически, и Пьер, пренебрегая опасностью, тотчас подверг свое предплечье действию радия. К его радости, участок кожи оказался поврежденным! В заметке для Академии наук он спокойно описывает наблюдаемые симптомы: «Кожа покраснела на поверхности в шесть квадратных сантиметров; имеет вид ожога, но не болит или болезнена чуть-чуть. Через некоторое время краснота, не распространяясь, начинает становиться интенсивнее; на двадцатый день образовались струпья, затем рана, которую лечили перевязками; на сорок второй день стала перестраиваться эпидерма от краев к центру, а на пятьдесят второй день остается еще ранка в квадратный сантиметр, имеющая сероватый цвет, что указывает на более глубокое омертвление ткани.

Добавим, что мадам Кюри, перенося в запаянной стеклянной трубочке несколько сантиграммов очень активного вещества, получила ожоги такого же характера, хотя маленькая пробирка находилась в тонком металлическом футляре.

Кроме таких резких воздействий мы за время наших работ с очень активными веществами испытали на себе различные виды их воздействия. Руки вообще имеют склонность к шелушению; концы пальцев, державших пробирки или капсулы с сильно радиоактивными веществами, становятся затверделыми, а иногда очень болезненными; у одного из нас воспаление оконечностей пальцев длилось две недели и кончилось тем, что сошла кожа, но болезненная чувствительность исчезла только через два месяца».

Эти эксперименты проложили путь к лечению раковых опухолей при помощи радиоактивных излучений. Все дело заключалось в дозе полученного облучения. Радий продлил жизнь многим тяжело и безнадежно больным людям, но он же убил Марию Кюри; она умерла от острой злокачественной анемии, вызванной длительным воздействием больших доз радиоактивного облучения.

И все-таки она была необычайно счастливой. Незадолго до смерти она писала: «Я принадлежу к числу людей, которые думают, что наука — это великая красота. Ученый у себя в лаборатории не просто техник; это ребенок лицом к лицу с явлениями природы, действующими на него, как волшебная сказка...»

Трудно без волнения читать эту превосходную книгу, с которой, безусловно, следует познакомиться каждому, кто любит науку.

В. Рудов



К статье «Повороты и пересечения многогранников»

1. $a^3\sqrt{2}/36$. 2. $3a^3/4$. 3. $a^3\sqrt{2}/54$.
4. $a^3\sqrt{2}/24$.

К статье «Задачи на законы динамики материальной точки»

1. $|\vec F_Д| = m\left(\frac{|\vec v|^2}{2L}+|\vec g|\right)\approx 9,6\cdot 10^6$ Н.

2. Не изменится $\left(|\vec T| = \frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec F|\right)$.

3. $H = \frac{1}{2}\frac{m|\vec v|}{M}\left(\Delta t+\frac{m|\vec v|}{M|\vec g|}\right) =$

$= 600$ м.

4. $|\Delta\vec F_Д| = G|\vec v|\sin\alpha = 5\cdot 10^2$ Н.

5. $t = \sqrt{L/2|\vec g|}\times$
$\times\sqrt{\frac{4m_1+m_2}{m_2-2m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}}\approx 3,6$ с.

К статье «Координатный метод»

1. Воспользоваться формулами

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\widehat{BAC},$$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|AB|\cdot|AC|}.$$

2. $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

3. $\frac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$.

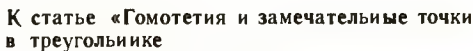
4. $l/\sqrt{10}$, $l\sqrt{2}/\sqrt{35}$.

5. $\arccos \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

6. $|SE| = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}}{2}$.

Указание. Поместить начало координат в точку D, в качестве осей абсцисс и ординат выбрать (DB) и (DC); заметить, что $((AC),\ (BDE)) = ((DCB),\widehat{\ }(BDE))$, и найти координаты точек S и E.

7. $\frac{5-\sqrt{7}}{4}a$.



К статье «Гомотетия и замечательные точки в треугольнике»
(см. «Квант» № 10)

1. Если данные отрезки не конгруэнтны, то существуют две гомотетии, переводящие один из них в другой (см. рисунок 1 и 2; на рисунке 2 изображен случай, когда отрезки принадлежат одной прямой).

Если данные отрезки конгруэнтны, то существует одна гомотетия, переводящая один из них в другой.

2. Искомым множеством точек M является окружность, в которую переходит данная окружность при гомотетии с центром в середине отрезка AB и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{3}$, но без образов точек A и B (рис. 3).

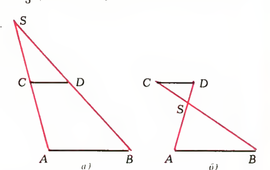


Рис. 1.

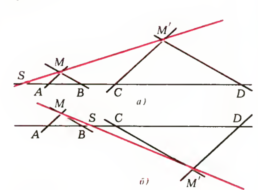


Рис. 2.

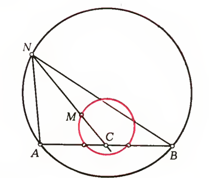


Рис. 3.

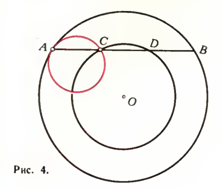


Рис. 4.

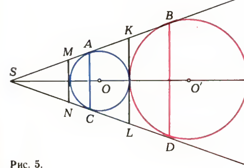


Рис. 5.

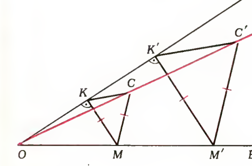


Рис. 6.

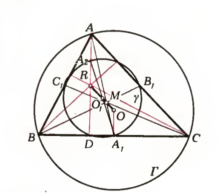


Рис. 7.

3. Пусть $(O;\ R)$ и $(O;\ r)$ — данные концентрические окружности; $[AB]$ — искомая хорда; $\{C, D\} = [AB] \cap (O;\ r)$. (Точку A можно выбрать на большей окружности произвольно.)

По условию $[AC] \cong [CD] \cong [DB] \Rightarrow$ $\Rightarrow C = H_A^{\frac{1}{3}}(B)$. Но

$$B \in (O;\ R) \Rightarrow C \in H_A^{\frac{1}{3}}((O;\ R)),$$

$$\left.\begin{array}{l} C \in (O;\ r) \\ C \in H_A^{\frac{1}{3}}((O;\ R)) \end{array}\right\} \Rightarrow C \in (O;\ r) \cap H_A^{\frac{1}{3}}((O;\ R)).$$

Итак, задача имеет решение, если меньшая окружность пересекается с образом большей окружности в гомотетии $H_A^{\frac{1}{3}}$. Последнее произойдет, когда $R > r \geqslant \frac{R}{3}$ (см. рис. 4).

4. Пусть AB и CD — общие внешние касательные к двум данным окружностям $(O;\ r)$ и $(O';\ r')$, касающимся внешним образом (A, B, C и D — точки касания).

Если $r = r'$, то $ABCD$ — квадрат, и в него можно вписать окружность.

Если $r \neq r'$, то $(AB) \cap (CD) = S$. Проведем касательные MN и KL к окружности $(O;\ r)$ в точках пересечения ее с прямой SO (рис. 5).

Пусть H — гомотетия, переводящая окружность $(O;\ r)$ в окружность $(O';\ r')$:

$$\left.\begin{array}{l} H_S([MN]) = [KL] \\ H_S([AC]) = [BD] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|KL|}{|MN|} = \frac{|BD|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|AC|}{|MN|} = \frac{|BD|}{|KL|} = k;$$

и гомотетия H_S^k переводит четырехугольник $MKLN$ в четырехугольник $ABDC$. Но в четырехугольник $MKLN$ вписана окружность $(O;\ r)$; следовательно, в гомотетичный ему четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

5. См. рисунок 6.

6. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC, R — его ортоцентр, O — центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 — середины сторон (рис. 7).

Гомотетия $H_M^{-\frac{1}{2}}$ переводит окружность Γ, описанную около треугольника ABC, в окружность γ с центром O_1, проходящую через середины сторон A_1, B_1 и C_1. При этом $H_M^{-\frac{1}{2}}(R) = O$, $|RM| = 2\,|OM|$; $H_M^{-\frac{1}{2}}(O) = O_1$. $|O_1M| = \frac{1}{2}|OM|$, так что центр O_1 окружности γ является серединой отрезка RO (см. рис. 7).

Покажем, что окружность γ проходит через середину A_2 отрезка RA (для отрезков RB и RC доказательство аналогично).

Заметим, что $\overline{H}_M^{-\frac{1}{2}}([RA))=[OA_1]$, так что $|OA_1|=\frac{1}{2}|RA|$. Симметрия S_{O_1} с центром в O_1 переводит противоположно направленные лучи OA_1 и RA друг в друга, а потому $A_2=S_{O_1}(A_1)\in[RA)$ и $|RA_2|=|OA_1|=\frac{1}{2}|RA|$. Поскольку симметрия S_{O_1} переводит окружность γ в себя, получаем, что $A_2\in\gamma$.

Далее, пусть D — основание высоты, опущенной из вершины A. Поскольку A_1A_2 — диаметр окружности γ, а D — вершина прямоугольного треугольника A_1DA_2 с гипотенузой A_1A_2, получаем, что основание высоты D также принадлежит γ. То же справедливо и для других высот треугольника ABC.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(*см. «Квант» № 10*)

1. а) 350; б) 108; в) 105; 135, 225, 315, 405. 2. На столе лежат: желтый квадрат, зеленый ромб, красный треугольник, синий круг. 3. В 1956 году.

К статье «Степа Мошкин повторяет геометрию»
(*см. «Квант» № 10*)

1. а) Красные окружности сдвинуты; б) рука у «человека» повернута не в ту сторону; в) красная окружность должна быть большего радиуса; г) красная линия должна быть симметрично отражена в l и уменьшена.

2. Если $(AF)\parallel(A'E)$, то $(A'B)\parallel(AB)$ и либо $A\ \ A'\in(MK)$, и тогда решить задачу невозможно (если $B\notin(MK)$), либо $A\neq A'$ и тогда $B\in(AA')$. Во втором случае надо построить сначала образ вспомогательной точки C, для которой прямые AC, $A'C$ и BC пересекают прямую MK в пределах чертежа.

3. Решается аналогично задаче 2.

5. Указание. Оси симметрии принадлежит точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны трапеции.

6. а) Постройте равносторонний треугольник AOA_1.

б) Дважды произведите поворот на 60°.

7. Указание. Произвести три поворота на 60° с центром O.

8. Дважды воспользуйтесь предыдущей задачей.

9. а) $A\to D$, $B\to F$, $C\to E$.

б) С помощью осевой и центральной симметрий.

К задачам
(*см. «Квант» № 10, с. 63*)

1. $x=\pi m/3$ $(m\in\mathbf{Z})$. Указание. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно $\sin 1917x$, найдите x из полученных значений $\sin 1977x$ и $\sin 1917x$ и сравните их. 4. $x=5$, $y=3$. 5. $n=1, 2, 3$. Указание. Функция $f(n)=(9/12)^n+(10/12)^n$ монотонно убывает.

К заметке «Вот это близнецы!»
(*см. «Квант» № 10, с. 39*)

В обоих примерах $\overline{\text{икс}}=305$, $\overline{\text{зет}}=124$

К задаче «Турнирная таблица»
(*см. «Квант» № 9, с. 10*)

	10а	10б	10в	10д	10г
10а	—	1:0	0:0	1:0	0:3
10б	0:1	—	1:0	0:1	5:0
10в	0:0	0:1	—	5:0	0:0
10д	0:1	1:0	0:5	—	2:1
10г	3:0	0:5	0:0	1:2	—

К кроссамберу «Ребята с нашего двора»
(*см. «Квант № 9, 3-ю с. обл.)*

Симе 12 лет, Римме 10 лет, Фиме 9 лет, Диме 8 лет и Тиме 7 лет.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович.

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

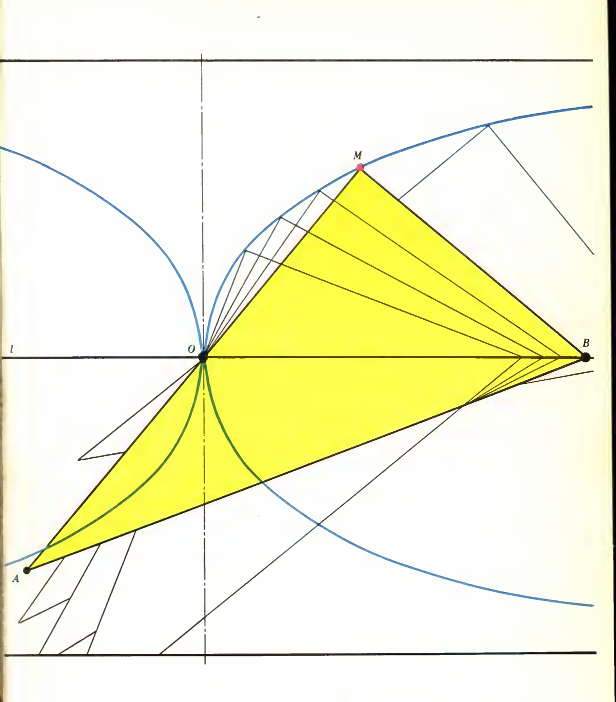
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор О. Бутусова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 26/VIII 1977 г.
Подписано в печать 10/X 1977 г.
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 6
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 9,44. Т-16464
Цена 30 коп. Заказ 1919 Тираж 290 157 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области



Кривая, которая здесь изображена, называется «каппа» из-за сходства с одноименной буквой ϰ греческого алфавита. Эту кривую впервые построил в 1662 году бельгийский математик Рене Франсуа де Слюз (1622—1685), когда вел переписку с Христианом Гюйгенсом.

Приведенный здесь способ построения дуги каппы принадлежит И. Ньютону. Пусть на прямой *l* отмечена точка *O*. Возьмем угольник *AMB* (*M* — вершина прямого угла). Правая верхняя ветвь каппы описывается вершиной *M*, когда угольник перемещается так, что вершина *B* скользит по п р а в о м у лучу прямой *l*, *M* находится н а д прямой *l* и катет *AM* проходит через *O*. Три остальные ветви каппы строятся аналогично.

Удлиняя катет *AM* угольника *AMB*, мы можем получить сколь угодно далекие точки каппы.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

2 6 - 8 7

Выполняя решения XXIV и XXV съездов КПСС наша страна в больших масштабах развивает атомную энергетику. На европейской территории Советского Союза строятся мощные атомные электростанции различных типов. Успешно работают могучие атомные ледоколы «Ленин» и «Арктика». Готовится к первому рейсу атомный ледокол «Сибирь». В десятой пятилетке суммарная мощность советских атомных электростанций увеличится на 12—15 миллионов киловатт.

На фотографиях ТАСС показаны один из реакторов Ленинградской атомной электростанции (мощность станции равна 2 миллиона киловатт) и советский атомный ледокол «Арктика», который впервые достиг Северного Полюса.

